Sea M variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sea $\alpha: I \longrightarrow M$ curva integral de X. Supongamos que $t_0 \in I$. Definimos:

$$\beta(t) = \alpha(t + t_0)$$

$\forall t \in I - t_0$. $\therefore$ $0 \in I - t_0$. Luego:

$$\beta'(t) = \alpha'(t+t_0) = X_{\alpha(t+t_0)} = X_{\beta(t)}$$

$\forall t \in I - t_0$. $\therefore$ β es curva integral. y satisface:

$$\beta(0) = \alpha(t_0).$$

Por tanto si $\alpha: I \longrightarrow M$ es curva integral con $p = \alpha(0)$ y $t_0 \in I \Longrightarrow \beta: I - t_0 \longrightarrow M$ es curva integral con $\beta(0) = \alpha(t_0)$. Como consecuencia:

Lema: Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha_p: I_p \longrightarrow M$ es la curva integral maximal $\ni$ $\alpha_p(0) = p$, entonces $\forall t_0 \in I_p$:

$$\beta: I_p - t_0 \longrightarrow M$$
$$\beta(t) = \alpha(t + t_0)$$

es la curva integral maximal $\ni$ $\beta(0) = \alpha(t_0)$. Es decir:

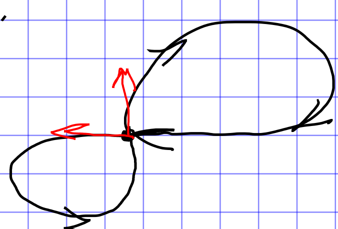
$$\alpha_{\alpha(t_0)}(t) = \alpha_p(t + t_0) \quad \forall t \in I_p - t_0.$$

Sea $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ curva (al menos continua). γ se dice periódica si $\exists$ $c>0$ $\ni$ $\gamma(t+c) = \gamma(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Si γ no es constante y periódica entonces:

$$c_0 = \inf\{c>0 \mid \gamma(t+c) = \gamma(t) \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$
$$>0$$

y se llama el período (mínimo).

Si $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ es periódica, $\gamma(t+c) = \gamma(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\gamma|_{[a,a+c)}$ es 1-1 $\Longrightarrow$ γ se dice simplemente periódica.



es periódica pero no es simplemente periódica.

Usando el Lema se puede ver que si $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow M$ es una curva integral maximal $\Longrightarrow$ se cumple una de las siguientes:

*) α es constante

*) α es 1-1

*) α es simplemente periódica.

Definición: Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice completo si todas sus curvas integrales maximales están definidas en $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

$$X_p = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p = e_2 \quad \forall p \in M$$

las curvas integrales son:

$$\alpha_{p_0}(t) = t e_2 + p_0$$

Si $p_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, entonces α_{p_0} está definida para $t > -y_0$.

Sea M variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consideramos el mapeo:

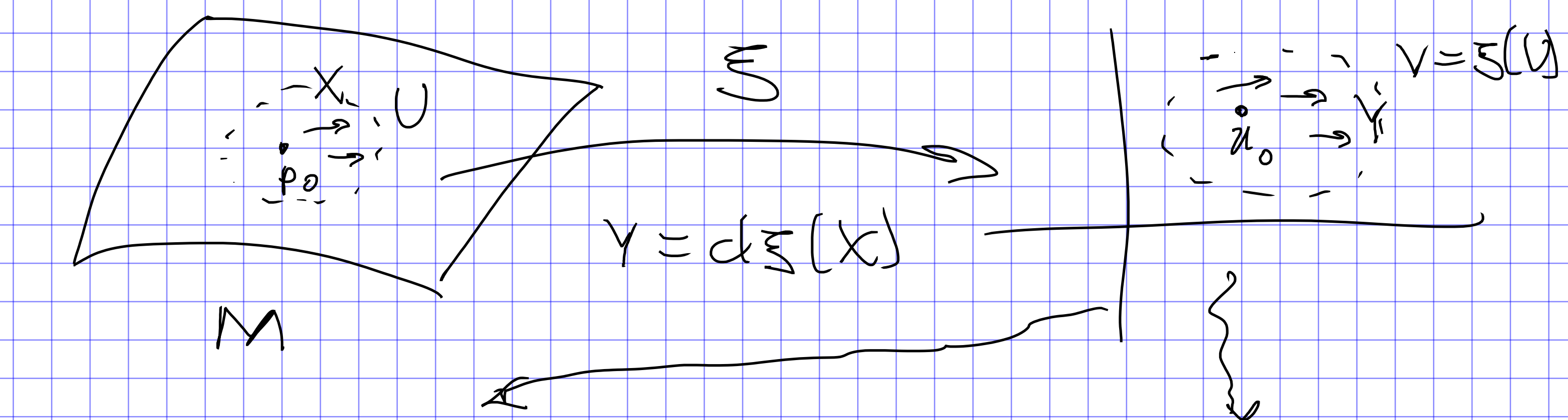
$$\psi(p,t) = \psi_t(p) = \alpha_p(t) \in M$$

definido en $\{(p,t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \in I_p\} = D \subseteq M \times \mathbb{R}$. Si X es completo $D = M \times \mathbb{R}$.

Afirmación: $D \subseteq M \times \mathbb{R}$ es abierto y ψ es suave:

$$\psi : D \subseteq M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$

Esto se prueba localmente con coordenadas y usando los resultados de EDO en $\mathbb{R}^n$:



*) Las soluciones α_u definen un mapeo suave:

$$V_0 \times (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$$
$$(u,t) \mapsto \alpha_u(t)$$

*) Si α_{u_0} está definida en $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $\forall u \in V_0$ vec. de u_0 de u_0, α_u está definida en $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$

$\therefore$ $(p_0, t_0) \in \xi^{-1}(V_0) \times (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subseteq D$ y ψ es suave en tal conjunto.

El mapeo suave:

$$\psi = \psi^X : D \subseteq M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$
$$\psi(p,t) = \psi_t(p) = \alpha_p(t)$$

es llamado el flujo local (local flow) de $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Tenemos:

$$\psi_0(p) = \alpha_p(0) = p \quad \forall p \in M$$

$\therefore \ \psi_0 = id_M.$

Además:

$$\psi_{t+s}(p) = \alpha_p(t+s) = \alpha_{\alpha_p(s)}(t)$$
$$= \psi_t(\alpha_p(s)) = \psi_t(\psi_s(p))$$

$\therefore \ \psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$

$\therefore \ \psi_0 = \psi_t \circ \psi_{-t}$

$\Rightarrow \ (\psi_t)^{-1} = \psi_{-t}. \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Por tanto, ψ_t es un difeomorfismo local de M con dominio:

$$D_t = \{p \mid (p,t) \in D\} \subseteq M$$

y la familia $(\psi_t)_t$ satisface:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{Diff}^{loc}(M) \\ t &\longmapsto \psi_t \end{aligned}$$

ser homomorfismo de "grupos" definido en $\{t \in \mathbb{R} \mid \exists p \in M \ni (p,t) \in D\}$

Por ello llamamos a $(\psi_t)_t$ un grupo uniparamétrico local.

Dada $\alpha : (a,b) \longrightarrow M$ $(a<0<b)$ curva suave queremos determinar (considerar) cuando se extiende a $[a,b]$. Solamente consideramos el extender a $(a,b]$.

Definición: Si $\alpha : [0,b) \longrightarrow M$ es suave, decimos que α es extendible si existe una extensión continua $\tilde{\alpha} : [0,b] \longrightarrow M \ni \tilde{\alpha}|_{[0,b)} = \alpha$.

Por tanto:

$\alpha : [0,b) \longrightarrow M$ es extendible

$\Longleftrightarrow$ $\lim_{t \to b^-} \alpha(t)$ existe.

$\Longleftrightarrow$ $\forall\ (s_k)_k \longrightarrow b^-$ el límite $\lim_k \alpha(s_k)$ existe y es el mismo para toda tal $(s_k)_k$.

Lema: Sea $\alpha : [0,b) \longrightarrow M$, $b<+\infty$, curva integral de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces son equivalentes:

(1) α no es maximal: α se extiende como curva integral a $[0,b+\varepsilon)$

(2) α es extendible.

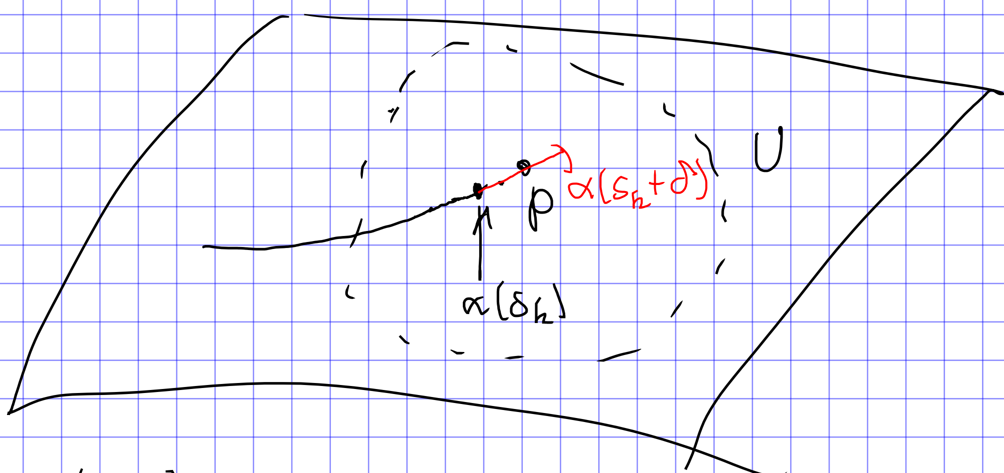
(3) $\alpha([0,b)) \subseteq K \in M$ K compacto.

(4) $\exists\ (s_k)_k \ni s_k \to b^-$ y $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha(s_k)$ existe.

Dem.: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)

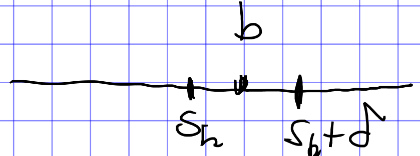
$K = \alpha([0,b])$

(4) $\Rightarrow$ (1):



$p = \lim\limits_{k\to+\infty} \alpha(s_k)$

$\exists\ \delta > 0$ y U vec. de p $\ni \forall q \in U$ α_q está definida en $(-\delta, \delta)$



Sea $s_k \ni s_k + \delta > b$ y $\alpha(s_k) \in U$

$\therefore$ α se extiende como curva integral a $[0, s_k+\delta) \supseteq [0,b]$.
$\Rightarrow$ (1). //