Corolario:
Si M es compacta, entonces todo campo vectorial en M es completo.

Algunos cálculos:

*) M con coordenadas (ξ, U)
$\xi = (x^1, \dots, x^n)$.

$$d\xi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = ?$$

$$d\xi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)(f) = \qquad (f \in C^\infty(\xi(U)),\ \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (f \circ \xi) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial u^j}(f \circ \xi \circ \xi^{-1})(\xi(p))$$

en $\mathbb{R}^n$

$$= \frac{\partial f}{\partial u^j}(\xi(p)) = \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_{\xi(p)}(f).$$

$$\therefore\ d\xi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_{\xi(p)} = e_j$$

*) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\psi : D \subseteq M \times \mathbb{R} \to M$ su flujo. ψ_t, α_p

$\therefore$ $\psi(p,t) = \psi_t(p) = \alpha_p(t)$

$$d\psi_{(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = ¿?$$

Sea $(x^1, \dots, x^n)$ coordenadas alrededor de p y completamos a coordenadas $(x^1, \dots, x^n, t)$ alrededor de $(p, 0)$.

$$\underbrace{d\psi_{(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}(x^i) = \frac{\partial}{\partial t}(x^i \circ \psi)(p,0)$$

$$= \frac{\partial(x^i \circ \alpha_p)}{\partial t}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x^i \circ \alpha_p)$$

como $\alpha_p'(0) = X_p$:

$$= X_p(x^i)$$

$$\therefore \quad d\psi_{(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = X_p$$

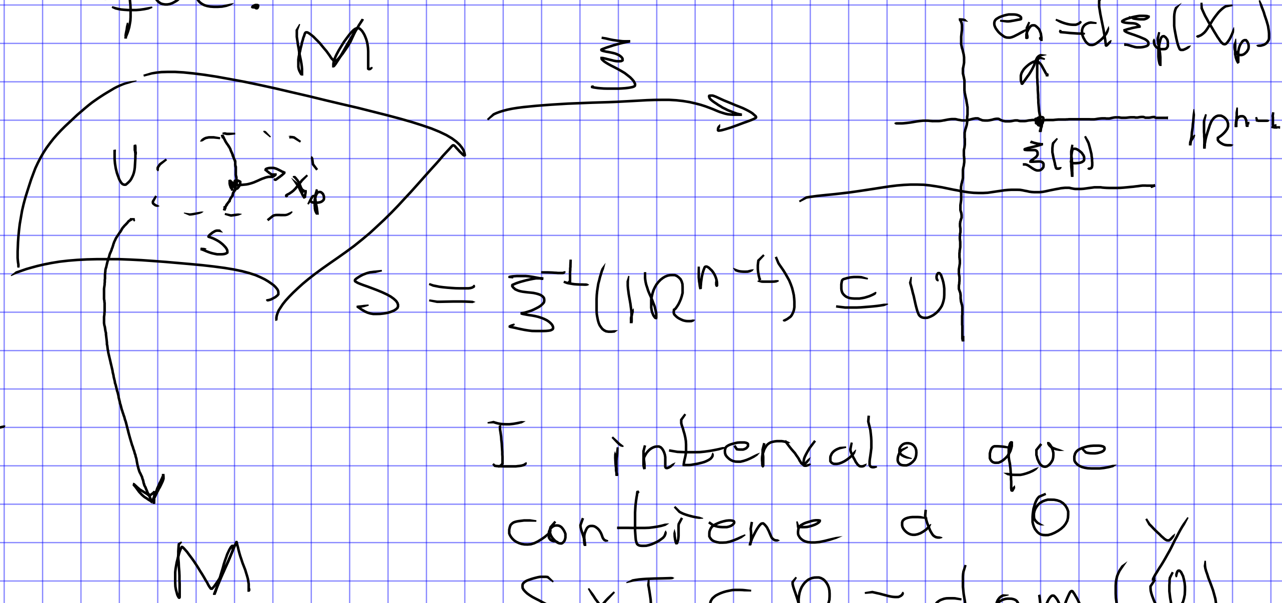
Supongamos que $X_p \neq 0$.
Entonces:

$$X_p \xleftrightarrow{d\psi} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(p,0)}$$

¿$\Rightarrow$? $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ para algunas x^i.

Veremos una respuesta afirmati_
va.

Consideramos coordenadas $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ alrededor de p tales que:



$\tilde{\Psi} = \Psi|_{S \times I}$

I intervalo que contiene a 0 y $S \times I \subseteq D = \mathrm{dom}(\Psi)$.

$\therefore$ $d\tilde{\Psi}_{(p,0)} : T_p S \times \mathbb{R} \longrightarrow T_p M$ es isomor_
fismo pues:

$$d\tilde{\Psi}_{(p,0)}\big|_{T_p S} = id_{T_p S}$$

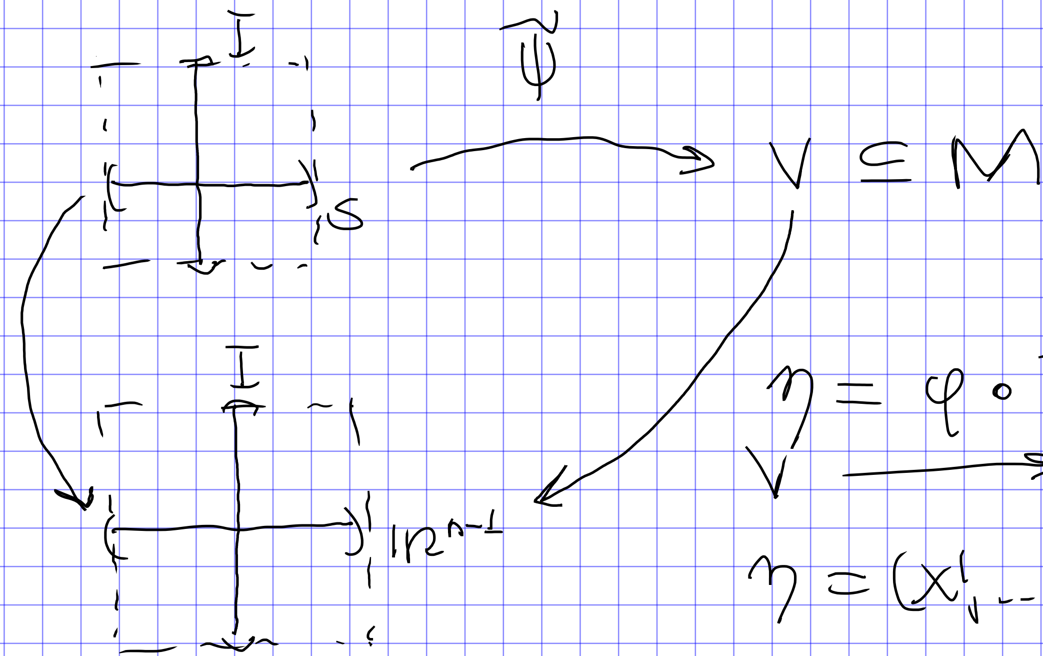
ya que $\tilde{\Psi}(q, 0) = q \quad \forall q \in S$.

$$d\tilde{\Psi}_{(p,0)}((0,1)) = d\tilde{\Psi}_{(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = X_p$$

Como X_p y $T_p S$ son l.i. enton_
ces $d\tilde{\Psi}_{(p,0)}$ es isomorfismo.

Por el Tma. de FI, reduciendo S, I de ser necesario, el mapeo
$\tilde{\Psi} : S \times I \longrightarrow V \subseteq M$

es difeomorfismo con V abierto en M.



φ
$\shortparallel$
$(\underbrace{y^1, \dots, y^{n-1}}_{\text{coord. de } S}, t)$

$\eta = \varphi \circ \tilde\psi^{-1}$

$V \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^n$

$\eta = (x^1, \dots, x^n)$

Afirmación: $\frac{\partial}{\partial x^n} = X$ en V.

$q = \tilde\psi(q', t)$

$$\begin{tikzcd}
\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(q',t)} \arrow[rr, mapsto, "①"] \arrow[dd, mapsto, bend right=60, "②"'] & & X_q \\
T_{q'}S \times \mathbb{R} \arrow[rr, "d\tilde\psi"] \arrow[d, "d\varphi"] & & T_qM \arrow[dll, "d\eta"] \\
\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} & & \\
\frac{\partial}{\partial u^n} & &
\end{tikzcd}$$

①, ② por los cálculos anteriores.

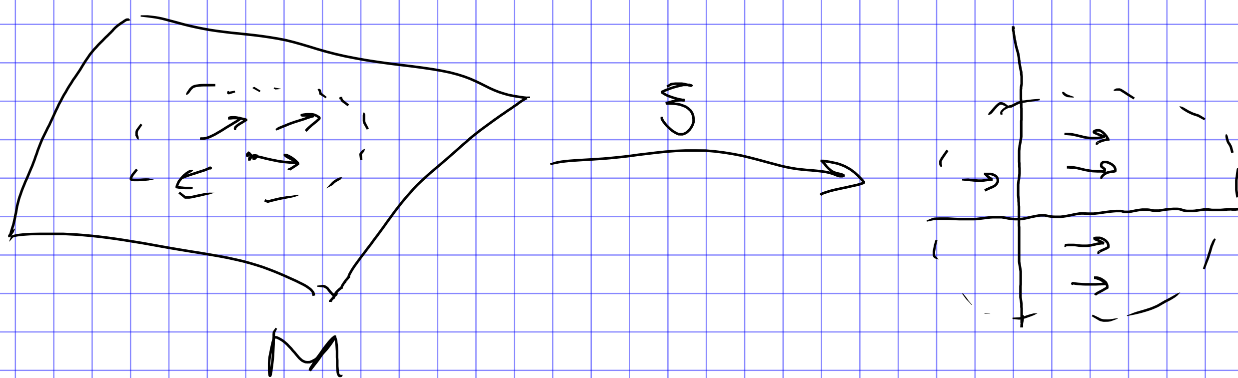
$$\therefore \quad d\eta(X) = \frac{\partial}{\partial u^n} = d\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$\therefore \quad X = \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Hemos probado:

Lema: Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M \ni X_p \neq 0$. Entonces $\exists\ (\xi = (x^1, \dots, x^n), U)$ carta de M con $p \in U \ni$:

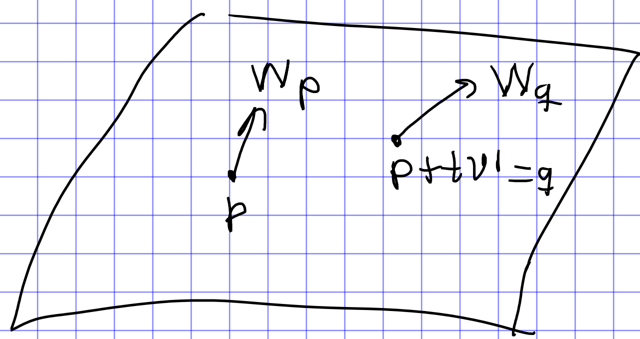
$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{en } U.$$



En particular, toda curva integral $\alpha : I \longrightarrow U$ satisface:

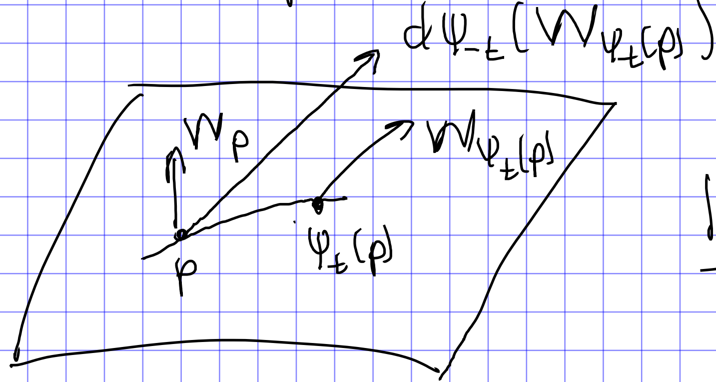
$$\begin{aligned} \xi \circ \alpha(t) &= (x^1 \circ \alpha(t), \dots, x^n \circ \alpha(t)) \\ &= (t + x^1(\alpha(0)), c^2, \dots, c^n) \\ &= t e_1 + c \qquad (c \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y ψ el flujo local de V. Usando ψ podemos "derivar" a W:



M

$$\lim_{t\to 0}\frac{W_q - W_p}{t} \quad ??!!$$



M

$$\lim_{t\to 0}\frac{d\varphi_{-t}(W_{\varphi_t(p)}) - W_p}{t} \quad \checkmark$$

Proposición:

Si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y φ es el flujo de V entonces:

$$[V,W]_p = \lim_{t\to 0}\frac{d\varphi_{-t}(W_{\varphi_t(p)}) - W_p}{t}$$

$\forall p \in M$.

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{d\varphi_{-t}(W_{\varphi_t(p)})}_{\text{en } T_pM \ \forall t.}$$

Por este resultado:

$$L_V : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$L_V(W) = [V,W]$$

es llamado derivada de Lie resp. de V.

Tensores.

Los tensores en M se pueden considerar puntual o globalmente mediante construcciones algebraicas en:

1) T_pM como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
2) $\mathfrak{X}(M)$ como módulo sobre $C^\infty(M)$ ($= \mathcal{F}(M)$ para O'Neill)

En lo sucesivo consideramos módulos V sobre K para estos dos casos.
Para módulos ya conocemos:

productos $V_1 \times \ldots \times V_r$
dual V^* ($f: V \longrightarrow K$ K-lineal)
mapeos multilineales:
$$V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow W$$

Definición: Para V un K-módulo como arriba (1) ó 2)) un tensor de tipo (r, s) ($r, s \geq 0$ enteros) es un mapeo multilineal:
$$A: (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K.$$

I. e.:

$$A_p : (T_p^* M)^r \times (T_p M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

ó

$$A : (\mathfrak{X}(M)^*)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

Veamos que $\mathfrak{X}(M)^* = \mathfrak{X}^*(M)$:

Lema: El mapeo:

$$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$(\omega, X) \longmapsto \omega(X)$$

donde $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$ $\forall p \in M$, es bilineal sobre $C^\infty(M)$ e induce un isomorfismo entre $\mathfrak{X}^*(M)$ y $\mathfrak{X}(M)^*$. I. e. para todo elemento $\lambda \in \mathfrak{X}(M)^*$ $\exists!$ $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ $\ni$:

$$\lambda(X) = \omega(X) \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Los tensores de tipo (r,s) sobre M se denotan como el conjunto $\mathcal{T}^r_s(M)$ y consta de mapeos multilineales:

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M).$$