Campos tensoriales
(Tensor fields)

Sea M variedad. Un campo tensorial de tipo (r,s) en M es un mapeo $C^\infty(M)$-multilineal:

$$A: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M).$$

$$(\theta^1,\ldots,\theta^r, X_1,\ldots,X_s) \mapsto A(\underbrace{\theta^1,\ldots,\theta^r}_{1}, \underbrace{X_1,\ldots,X_s}_{2}) \in C^\infty(M)$$

Los argumentos en 1 se dicen contravariantes y los argumentos en 2 se dicen covariantes.
También usamos entrada, variable en vez de argumento.
Se denota por $\mathcal{T}^r_s(M)$ el espacio vectorial real de tensores o campos tensoriales de tipo (r,s).
$\mathcal{T}^r_s(M)$ es también $C^\infty(M)$-módulo.
Caso especial:

$$\mathcal{T}^0_0(M) = C^\infty(M).$$

Ejemplos:

(1) Sea $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-forma suave.
ω define el mapeo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \omega(X) \mid \leftarrow p \longmapsto \omega_p(X_p) \end{aligned}$$

Además:

$$\omega(X+Y) = \omega(X) + \omega(Y) \checkmark$$

$$\begin{aligned} \omega(fX)(p) &= \omega_p((fX)_p) \\ &= \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p) \\ &= (f\,\omega(X))(p) \checkmark \end{aligned}$$

$\therefore \quad \omega \in \mathcal{T}^0_1(M)$.

(2) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. X define el mapeo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^*(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \omega &\longmapsto \omega(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{notación}}}{=} X(\omega) \end{aligned}$$

el cual es claramente $C^\infty(M)$-lineal.

$\therefore \quad X \in \mathcal{T}^1_0(M)$.

(3) $F : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

$$F(\omega, X) = \omega(X)$$

es tensor de tipo $(1,1)$.

(4) $[\,,\,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$

induce el mapeo:

$$\varphi : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^2 \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$\varphi(\omega, X, Y) = \omega([X, Y])$$

no es $C^\infty(M)$-lineal en X o en Y.

$\therefore$ φ no es tensor.

(5) Estructuras casi-complejas:

$$J : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\ni J^2 = -id.$$

y es $C^\infty(M)$-lineal.

$\therefore$ $J \in \mathcal{T}^1_1(M)$ vía:

$$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$(\omega, X) \longmapsto \omega(JX).$$

Producto tensorial:

$$A \in \mathcal{I}^r_s(M), \quad B \in \mathcal{I}^{r'}_{s'}(M)$$

entonces $\underline{A \otimes B}$ mapea:

$$\mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$(\theta^1, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) \mapsto A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)\, B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'})$$

$\therefore$ $A \otimes B \in \mathcal{I}^{r+r'}_{s+s'}(M)$.

Caso particular: $f \in C^\infty(M) = \mathcal{I}^0_0(M)$

$$f \otimes A = A \otimes f = fA$$

La operación:

$$(A, B) \longmapsto A \otimes B$$

es $C^\infty(M)$-bilineal y asociativa.

Ejemplo: Si $(\xi = (x^1, \ldots, x^n), U)$ es carta de M, entonces

$$dx^j \in \mathfrak{X}^*(U)$$

$\therefore$ $dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \in \mathcal{I}^0_2(U)$:

$$dx^{j_1} \otimes dx^{j_2}(X, Y) = dx^{j_1}(X)\, dx^{j_2}(Y)$$

$\therefore$ $dx^{j_1} \otimes dx^{j_2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{h_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{h_2}}\right) = \delta_{j_1 h_1} \delta_{j_2 h_2}$

$\therefore \quad dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1.$

$A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ es campo tensorial.

Preguntas:

¿porqué campo? Ver abajo.

¿porqué tensor? Física.

Campo se usa para hablar de selecciones suaves punto por punto. A define tal selección como sigue:

$$p \in M, \quad \bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r \in T^*_p M$$

$$\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s \in T_p M$$

y definimos:

$$A_p(\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s) =$$

$$= A(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p)$$

donde $\omega^j \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_h \in \mathfrak{X}(M) \ni$

$$\omega^j_p = \bar{\omega}^j, \quad X_h(p) = \bar{X}_h \quad \forall j, h$$

$\therefore \quad A_p : (T^*_p M)^r \times (T_p M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-multilineal.

Solamente debemos probar:

Proposición:

Si $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $p \in M$ y

$\theta^1, \dots, \theta^r, \omega^1, \dots, \omega^r \in \mathfrak{X}^*(M)$

$X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_s \in \mathfrak{X}(M)$

$\supset \theta^j_p = \omega^j_p$, $X_h(p) = Y_h(p)$

$\Longrightarrow A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) =$

$= A(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)(p).$

Lema: Si $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ y $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$
$X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ y alguno de los
θ^j, X_h se anula en p
$\Longrightarrow A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$

Dem.:

Supongamos que $X_s|_p = 0$.
Sean $(x^1, \dots, x^n)$ coordenadas en
U, $p \in U$. Sea $f \in C^\infty(M)$ bump
i.e. $f(p) = 1$, $\operatorname{supp} f \subseteq U$.

En U escribimos:

$$X_s = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{n} X_s(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Recordamos que:

$$f X_s(x^j) \in C^\infty(M), \quad f \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$$

$\therefore$ $$f^2 X_s = \sum_{j=1}^{n} f X_s(x^j)\, f\frac{\partial}{\partial x^j}$$

se cumple en M.

$\therefore$ $f^2 A(\theta^1, \dots, X_s) =$

$$= A(\theta^1, \dots, f^2 X_s)$$

$$= A\Big(\theta^1, \dots, \sum_{j=1}^{n} f X_s(x^j)\, f\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f\, X_s(x^j)\, A\Big(\theta^1, \dots, f\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$$

y evaluando en p:

$$\overbrace{f^2(p)}^{=1} A(\theta^1, \dots, X_s)(p) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overbrace{f(p)}^{=1} X_s(x^j)(p)\, \overbrace{A\Big(\theta^1, \dots, f\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)(p)}^{=0\ \forall j}$$

$$= 0 \quad //$$

Dem. de la Proposición:

Veamos el caso $r=1$, $s=2$:

$$A(\theta^1, X_1, X_2)(p) - A(\omega^1, Y_1, Y_2)(p) =$$

$$= \underbrace{A(\theta^1 - \omega^1, X_1, X_2)(p) + A(\omega^1, X_1 - Y_1, X_2)(p) + A(\omega^1, Y_1, X_2 - Y_2)(p)}_{=0 \text{ por el lema.}} \quad //$$

Esto nos permite definir $\forall A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $p \in M$:

$$A \longmapsto A_p : (T_p^* M)^r \times (T_p M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A_p(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{X}_s) = A(\theta^1, \ldots, X_s)(p)$$

cuando $\theta^j_p = \bar{\theta}^j$, $X_h(p) = \bar{X}_h$.

En particular:

$$A(\theta^1, \ldots, X_s)(p) = A_p(\theta^1_p, \ldots, X_s(p))$$

$\forall p \in M$.

$\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_h \in \mathfrak{X}(M)$.

$\therefore$ $p \longmapsto A_p$ es suave pues $A(\theta^1, \ldots, X_s)$ es suave.

(Ver final de la sección Tensors at a point)

Componentes de tensores.

Sea M variedad y $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas en $U \subseteq M$.
Recordamos:

$$X \in \mathfrak{X}(M): \quad X = \sum_{j=1}^{n} X(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{en } U$$

componentes de X en U:

$$X(x^j) = dx^j(X) = X(dx^j)$$

$$\omega \in \mathfrak{X}^*(M): \quad \omega = \sum_{j=1}^{n} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^j$$

componentes de ω en U:

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Definición: Sea M con coordenadas $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ en U.
Si $A \in \mathfrak{I}^r_s(M)$ entonces las componentes de A son:

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A\left(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)$$

que están en $C^\infty(U)$ con
$i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n.$