Variedades pseudo-Riemannianas.
(semi-)

Definición: (Métrica)
En una variedad M un tensor métrico (métrica pseudo-Riemanniana) es un tensor $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ simétrico no degenerado de índice constante.
Es decir, $\forall p \in M$ g define:

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

producto escalar y el índice es constante en p.

Definición: Una variedad pseudo-Riemanniana es un par (M, g) con M variedad y g métrica pseudo-Riemanniana.

Sea M variedad pseudo-Riemanniana con métrica g. El índice ν de cada g_p se conoce también como el índice de M.

$\therefore$ $0 \leq \nu \leq \dim M$.

Si $\nu = 0$, M se dice Riemanniana.
Si $\nu = 1$ y $\dim M \geq 2$, M se dice Lorentziana o de Lorentz.

$\langle , \rangle$ es notación alternativa para g.

$\forall u, v \in T_pM: \langle u, v \rangle_p = g_p(u, v)$

$\forall V, W \in \mathfrak{X}(M): \langle V, W \rangle = g(V, W)$

$$g(V, W)_p = g(V, W)(p) = g_p(V_p, W_p)$$

Sean $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas en $U \subseteq M$, entonces: $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \right)$

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

son las componentes de g en U.

$\therefore \left(g_{ij}(p) \right)_{i,j=1}^n$ es simétrica nosingular $\forall p \in U$.

Además:

$$g(V, W) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} V^i W^j \quad \text{en } U.$$

también:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \, dx^i \otimes dx^j \quad \text{en } U.$$

La inversa de $(g_{ij})_{i,j}$ se denota

$$(g^{ij})_{i,j=1}^{n}$$

En particular:

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik} g^{kj} = \sum_{k=1}^{n} g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j$$

$$\forall i,j.$$

Ejemplo básico:

$\mathbb{R}_\nu^n$ con:

$$\langle u, v \rangle_p = -\sum_{j=1}^{\nu} u_j v_j + \sum_{j=\nu+1}^{n} u_j v_j$$

$$= u^T I_{\nu, n-\nu} v \quad (u, v \text{ columnas})$$

$$I_{\nu, n-\nu} = \begin{pmatrix} -I_\nu & 0 \\ 0 & I_{n-\nu} \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Notación:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & i = 1, \ldots, \nu \\ +1 & i = \nu+1, \ldots, n \end{cases}$$

Por tanto, la métrica de $\mathbb{R}_\nu^n$ es:

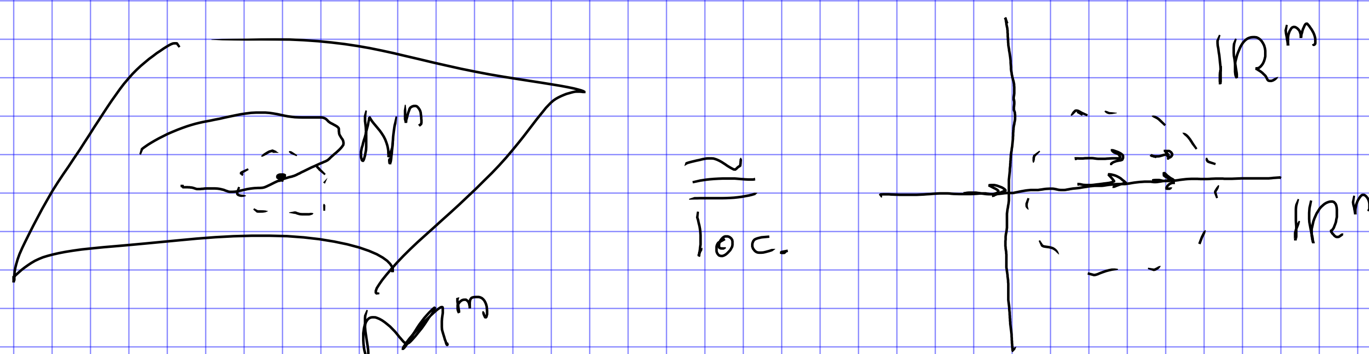
$$g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, du_i \otimes du_i.$$

Ejemplo:
Sea M variedad pseudo-Riemanniana con métrica g.
Sea $N \subseteq M$ subvariedad.
Entonces definimos el tensor $\tilde{g} \in \underset{\sim}{T}^0_2(N)$ vía:

$$\tilde{g}_p : T_pN \times T_pN \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\tilde{g}_p(u,v) = g_p(u,v).$$

$\forall p \in N$.

Se puede definir localmente vía extensión de campos:



$\tilde{g}$ satisface:

$\tilde{g}$ tipo $(0,2)$ (bilineal) ✓
$\tilde{g}$ simétrico ✓
$\tilde{g}$ nodegenerado ?

Si $\tilde{g}_p$ es no-deg. $\forall p \in N$ (en T_pN), entonces N se dice variedad pseudo-Riemanniana y $(N, \tilde{g})$ es variedad pseudo-Riemanniana. Esto se cumple trivialmente si $\nu = 0$, $\dim M$, pero no se cumple en general.

Razón fundamental de esta distinción:

Si $0 < \nu < \dim M$, entonces $\forall p \in M$ existen $v \in T_pM \setminus \{0\}$ tales que

$$g_p(v, v) > 0 \quad \text{ó} \quad = 0 \quad \text{ó} \quad < 0$$

Por ejemplo, si $v_1, \ldots, v_n$ ($n = \dim M$) es base ortonormal con:

$$g_p(v_i, v_j) = \varepsilon_i \delta_{ij} \qquad \forall i, j$$

entonces:

$$g_p(v_1, v_1) = -1, \quad g_p(v_n, v_n) = +1$$

$$g_p(v_1 + v_n, v_1 + v_n) = 0$$

Definición: Un vector tangente v a una variedad pseudo-Riemanniana M es:

v de tipo espacial (espacialoide ó spacelike)
si $\langle v, v \rangle > 0$ ó $v = 0$.

v es nulo (null ó lightlike) si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$.

v es de tipo temporal (temporaloide ó timelike) si $\langle v, v \rangle < 0$.

Ejemplo: (Espacio de Minkowski)

$\mathbb{R}^n_1$ (casos típicos $n = 2, 3, 4$) con la métrica: $(c > 0)$

$$g_p = -c^2 du_1 \otimes du_1 + \sum_{i=2}^{n} du_i \otimes du_i$$

$n = 2, 3, 4$:

$$-c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx$$

$$-c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

$$-c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Sea $v \in \mathbb{R}^n_1$, $v = (t, u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces:

$$\langle v, v \rangle = -c^2 t^2 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2$$

$$= -c^2 t^2 + \|u\|^2$$

con $\| \ \|$ la norma Euclideana en

$\mathbb{R}^{n-1}$

- $\langle v, v \rangle = 0$

$$\iff -c^2t^2 + \|u\|^2 = 0$$

$$\iff c^2 = \frac{\|u\|^2}{t^2}$$

$$\iff c = \frac{\|u\|}{|t|} = \frac{\text{longitud o dist.}}{\text{tiempo}}$$

$= \text{velocidad.}$

$\overset{\text{Física}}{\iff}$ el desplazamiento u en el tiempo t da una velocidad igual a c. i.e. rayo de luz.

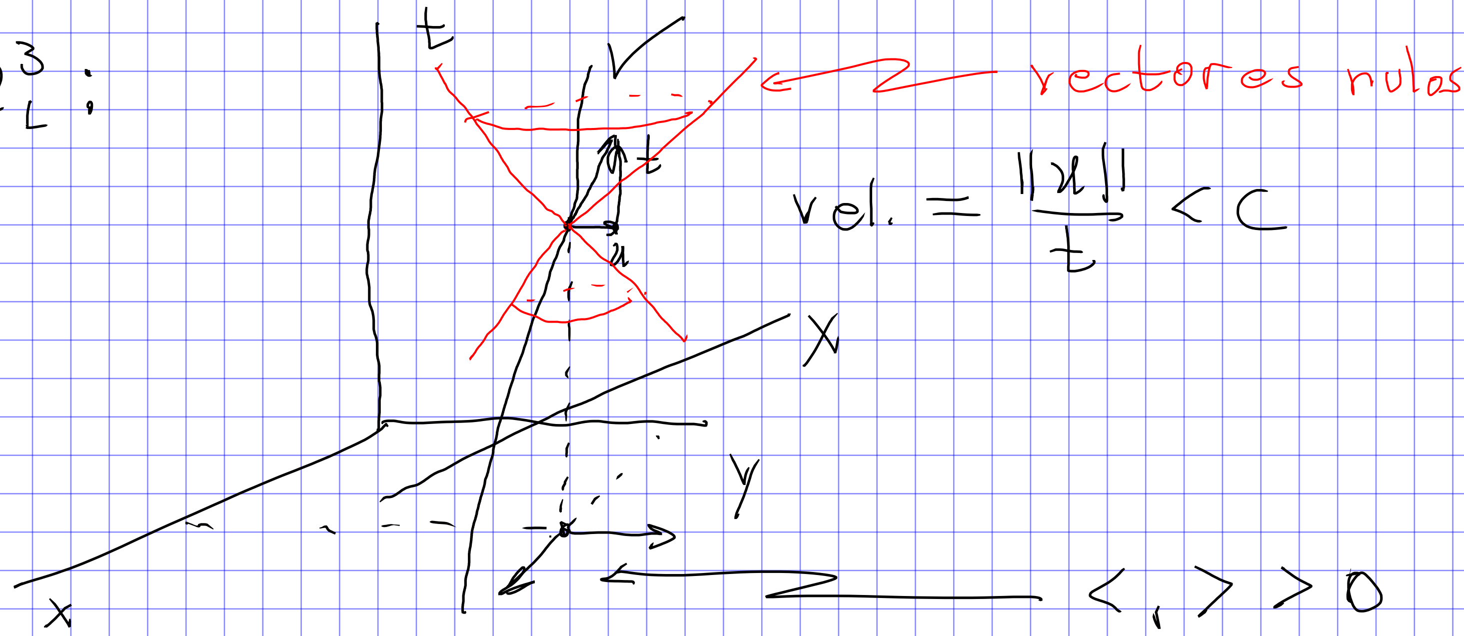
- $\langle v, v \rangle < 0$

$$\iff -c^2t^2 + \|u\|^2 < 0$$

$$\iff \frac{\|u\|}{|t|} < c$$

$\overset{\text{Física}}{\iff}$ el desplazamiento u en el tiempo t da una velocidad $< c$, i.e. movimiento de una partícula.

$\mathbb{R}^3_L$:



$$\text{vel.} = \frac{\|u\|}{t} < C$$

toda velocidad de partículas es $< C$.

Ejemplo:

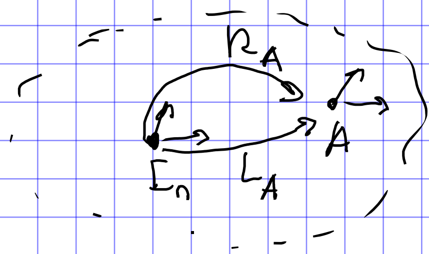
$M_{n\times n}(\mathbb{R}) \supseteq GL(n, \mathbb{R})$ son variedades.

$M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ y tiene el producto escalar natural:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} = tr(AB^T)$$

y con este producto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $GL(n, \mathbb{R})$ son variedades Riemannianas. Pero la métrica en $GL(n, \mathbb{R})$ <u>no</u> es invariante bajo traslaciones!

$$L_A, R_A : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$
$$L_A(X) = AX$$
$$R_A(X) = XA$$



$GL(n,\mathbb{R})$

lo cual introduce

$$X \longmapsto AXA^{-1} =$$
$$= L_A \circ R_{A^{-1}}(X)$$

Pero $(X,Y) \longmapsto tr(XY^T)$ no es invariante bajo conjugación, y en cambio:

$$(X,Y) \longmapsto tr(XY)$$

sí lo es.