Sean (M, g), (N, h) variedades pseudo-Riemannianas.

$\forall (p, q) \in M \times N$ tenemos un isomorfismo:

$$T_pM \times T_qN \longrightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$$
$$(u, v) \longmapsto u + v$$

Definimos $g + h$ $(= g \oplus h)$ como la métrica en $M \times N$ dada por:

$$(g+h)_{(p,q)}(u_1 + v_1, u_2 + v_2) =$$
$$= g_p(u_1, u_2) + h_q(v_1, v_2)$$

$\forall (p,q) \in M \times N$ $\quad u_1, u_2 \in T_pM$
$\quad v_1, v_2 \in T_qN$.

Si $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$

$\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$ son las proyecciones naturales, entonces:

$$g + h = \pi_1^* g + \pi_2^* h$$
$$= g(d\pi_1(\ ), d\pi_1(\ )) + h(d\pi_2(\ ), d\pi_2(\ ))$$

$\therefore$ $(M \times N, g+h)$ es variedad pseudo-Riemanniana.

Si M tiene índice ν
N " " μ
$\Rightarrow$ $M \times N$ " " $\nu + \mu$

Si M tiene signatura (p_1, q_1)
N " " (p_2, q_2)
$\Rightarrow$ $M \times N$ " " (p_1+p_2, q_1+q_2)

Ejemplo:

$\mathbb{R}^n_\nu$ tiene $-\sum_{j=1}^{\nu} u_j v_j + \sum_{j=\nu+1}^{n} u_j v_j$

$\therefore$ $\mathbb{R}^n_\nu = (\mathbb{R}^\nu, -\langle\,,\rangle_0) \times (\mathbb{R}^{n-\nu}, \langle\,,\rangle_0)$

donde $\langle\,,\rangle_0$ es el producto interno definido positivo:

$$\langle u, v\rangle_0 = \sum_j u_j v_j$$

También:

$$\mathbb{R}^n_\nu = \underbrace{\mathbb{R}^1_1 \times \dots \times \mathbb{R}^1_1}_{\nu \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^1_0 \times \dots \times \mathbb{R}^1_0}_{n-\nu \text{ veces}}$$

Definición: Una isometría $\varphi : M \to N$ entre variedades pseudoRiemannianas (M, g), (N, h) es un mapeo tal que:

(1) φ difeomorfismo

(2) $\varphi^* h = g$, i.e.:

$$g_p(u, v) = h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v))$$

$\forall p \in M$, $u, v \in T_pM$.

Propiedades:

(1) La identidad en (M, g) es isometría.

(2) $\varphi : M \to N$ isometría $\Rightarrow$ φ^{-1} es isometría.

(3) $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to P$ isometrías $\Rightarrow$ $\psi \circ \varphi : M \to P$ es isometría.

En particular, el conjunto:

$$\mathrm{Iso}(M,g) = \{ \varphi : M \to M \mid \varphi \text{ isometría} \}$$

es un grupo.

Teorema (ver Transformation Groups de Kobayashi)

Iso(M, g) es un grupo de Lie analítico real con la topología compacta-abierta.

Geometría pseudo-Riemanniana: Estudio de las propiedades de (M, g) invariantes bajo Iso(M, g).

Ejemplos de isometrías:

1) V, W espacios con producto escalar: $\langle\, , \rangle_V$, $\langle\, , \rangle_W$

Si $T: V \longrightarrow W$ es isometría de espacios vectoriales con producto escalar:

$$\langle T v_1, T v_2 \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V \quad \forall v_1, v_2$$

$\Rightarrow$) $T: V \longrightarrow W$ es isometría de variedades pseudo-Riemannianas.

2) Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ considerada como subvariedad Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Entonces $\forall A \in O(n)$ el mapeo:

$$A|_{S^n} : S^n \longrightarrow S^n$$
$$x \longmapsto Ax$$

es isometría de S^n:

$$p \in S^n, \ u, v \in T_p S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\langle d(A|_{S^n})_p(u), d(A|_{S^n})_p(v) \rangle_p =$$

$$= \langle Au, Av \rangle_0 \quad (\text{en } \mathbb{R}^{n+1})$$
$$= \langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle_p$$

Afirmación: (no trivial, no difícil):

$$\mathrm{Iso}(S^n) = O(n).$$

Conexión de Levi-Civita.

Si M es variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$, ¿cómo derivamos a X?

Sol.: (?) $X : M \longrightarrow TM$
$$p \longmapsto X_p$$
$\therefore$ $dX_p : T_pM \longrightarrow T_{X_p}(TM)$
que no es campo vectorial.

Sol.: (?) Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$ consideramos:
$$L_V(X) \in \mathfrak{X}(M)$$
$\therefore$ $L_V : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$
satisface Leibniz, pero no es $C^\infty(M)$-lineal en V y no se puede definir:
$$L_v(X) = L_V(X)_p \; ??$$
con $v = V_p$. Necesitamos V definido y fijo en una vecindad de p.

Comparar con la forma "natural" de derivar campos en $\mathbb{R}^n$:

$$V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

Entonces:

$$V = \sum_{j=1}^{n} v^j e_j = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

$$W = \sum_{j=1}^{n} w^j e_j = \sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

Se define la derivada de W respecto de V:

$$D_V W = \sum_{j=1}^{n} V(w^j)\, e_j \quad \frac{\partial}{\partial u^j}$$

y también tenemos:

$$D_v W = \sum_{j=1}^{n} v(w^j)\, e_j$$

$\forall v \in T_p \mathbb{R}^n$.

Posible solución para variedades:

Usar coordenadas $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ y definir:

$$V, W \in \mathfrak{X}(M)$$

$$W = \sum_{j=1}^{n} W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$D_V W = \sum_{j=1}^{n} V(W^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

pero esto depende de ξ.

El tipo de derivación que buscamos es el siguiente:

Definición: Una <u>conexión</u> D sobre una variedad M es un mapeo:

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(V, W) \longmapsto D_V W$$

tal que:

(1) $D_V W$ es $C^\infty(M)$-lineal en V.

(2) $D_V W$ es $\mathbb{R}$-lineal en W

(3) $D_V W$ satisface Leibniz en W:

$$D_V(fW) = V(f)W + fD_VW$$

Ejemplo:

D en $\mathbb{R}^n$:

$$D_V W = \sum_{j=1}^{n} V(W^j)\, e_j .$$

Teorema (fundamental de la geometría pseudo-Riemanniana)

Si (M, g) es una variedad pseudo-Riemanniana, entonces $\exists!$ conexión D en M tal que:

(4) $D_V W - D_W V = [V, W]$

(libre de torsión)

(5) $X(g(V,W)) =$

$= g(D_X V, W) + g(V, D_X W)$

(D es conexión métrica)

$\forall\, X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

D es llamada la conexión de Levi-Civita de M y además satisface la ecuación de Koszul:

$$2\langle D_V W, X\rangle =$$

$$= V\langle W, X\rangle + W\langle V, X\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle$$