Proposición:
M pseudo-Riemanniana
$\alpha: I \longrightarrow M$ curva suave.
Entonces $\exists$ un único mapeo

$$\mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$$
$$Z \longmapsto Z' = \frac{DZ}{dt}$$

llamada la derivada covariante inducida, que satisface:

(1) $(a_1 Z_1 + a_2 Z_2)' = a_1 Z_1' + a_2 Z_2'$
$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

(2) $(hZ)' = h'Z + hZ'$
$\forall h: I \to \mathbb{R},\ Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

(3) $(V_\alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)} V \quad \forall t \in I$
$V \in \mathfrak{X}(M)$

(Notación:
Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha: I \longrightarrow M$ C^∞, entonces $V_\alpha \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es dado por:

$$V_\alpha: I \longrightarrow TM$$
$$V_\alpha(t) = V_{\alpha(t)}$$
)

Además se cumple:

(4) $\langle Z_1, Z_2\rangle' = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$

$\forall\, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$

Dem.:

Unicidad:

Sea $t_0 \in I$, $\alpha(t_0) \in M$ y sean $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas en U con $\alpha(t_0) \in U$. Sea $J \subseteq I$ abierto con $t_0 \in J$ $\ni$ $\alpha(J) \subseteq U$.

Todo $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se puede escribir en J como sigue:

$$Z_t = Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

$$Z_t = \sum_{i=1}^{n} Z^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\alpha(t)}$$

$$\therefore\quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_\alpha \quad \text{en } J$$

$\therefore$ (1), (2) y (3) implican:

$$\circledast\quad Z' = \sum_{i=1}^{n}\left((Z^i)'\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_\alpha + Z^i\left(D_{\alpha'}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_\alpha\right)$$

y el lado derecho es el mismo independientemente de $Z \longmapsto Z'$. $\therefore$ hay unicidad.

Existencia:

Usamos $\otimes$ localmente:

-) Descomponemos $I = \bigcup_r J_r$ $\ni$ J_r intervalo abierto con coordenadas en una vecindad de $\alpha(J_r)$.
-) $Z \longmapsto Z'$ se define en J_r usando $\otimes$ con las coordenadas de $\alpha(J_r)$, y se prueba que $\otimes$ satisface (1) - (4).
-) Las definiciones de $Z \longmapsto Z'$ en los traslapes $J_r \cap J_s$ coinciden por la unicidad. //

Siguiendo la demostración tenemos:

$$Z' = \sum_{i=1}^{n} \left((Z^i)' \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_\alpha + Z^i \left(D_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)$$

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\alpha}$$

y se obtiene:

$$Z' = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{dZ^h}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^h \circ \alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Definición:

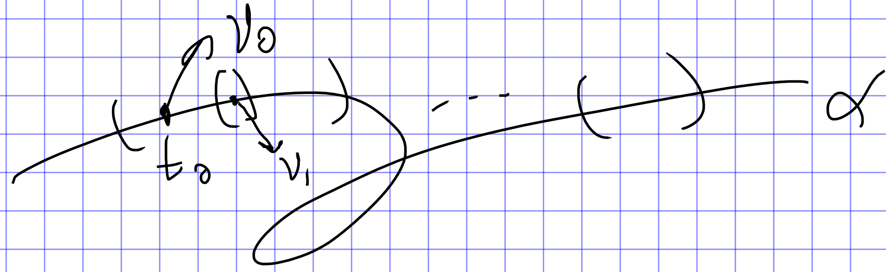
$Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se dice paralelo ssi $Z' \equiv 0$.

$\therefore$ Z paralelo ssi en coordenadas alrededor de cada punto de I:

$$\frac{dZ^h}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^h \circ \alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j = 0$$

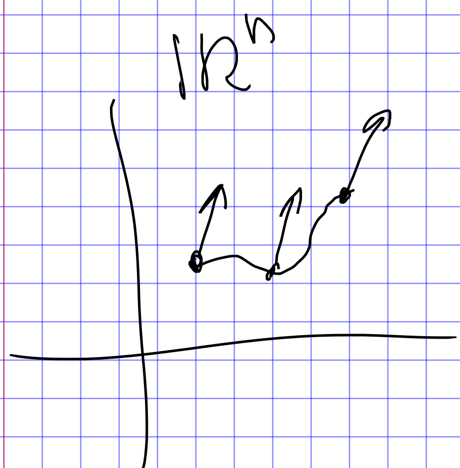
$\forall h = 1, \dots, n.$

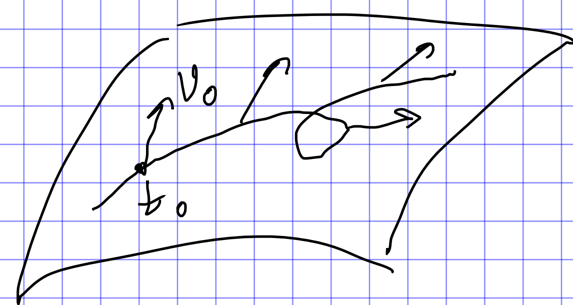
El cual es un sistema lineal de EDO y por tanto tiene solución con condición inicial en todo $I = \mathrm{dom}(\alpha)$.

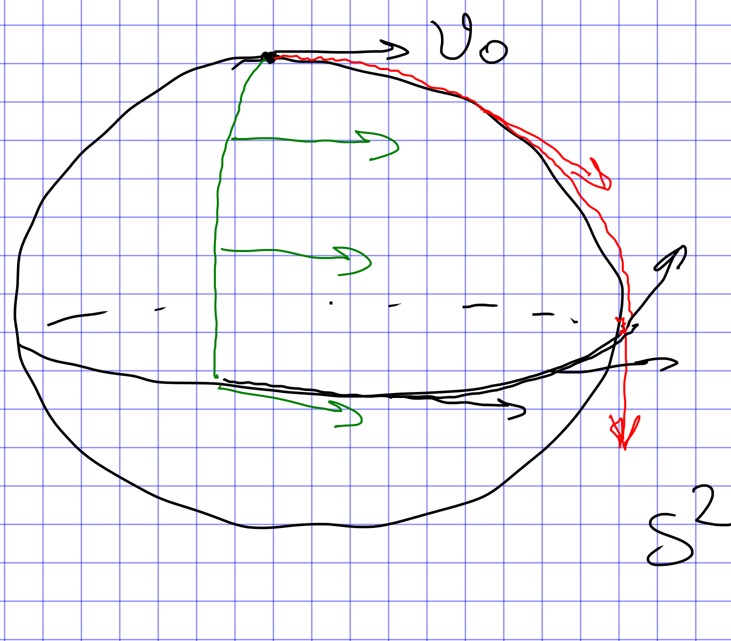


Proposición:
Si $\alpha: I \to M$ es suave, $t_0 \in I$ y $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$
$\implies \exists!\ Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo $\ni:$

$$Z_{t_0} = v_0.$$







Definición:

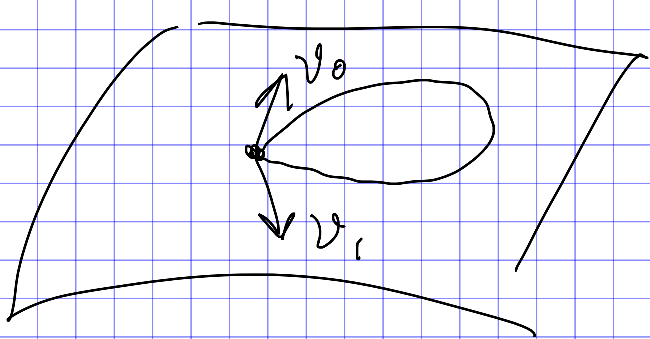
Sea $\alpha: I \to M$ suave
El transporte paralelo a lo largo de α de $\alpha(t_0)$ a $\alpha(t_1)$ se define como el mapeo:

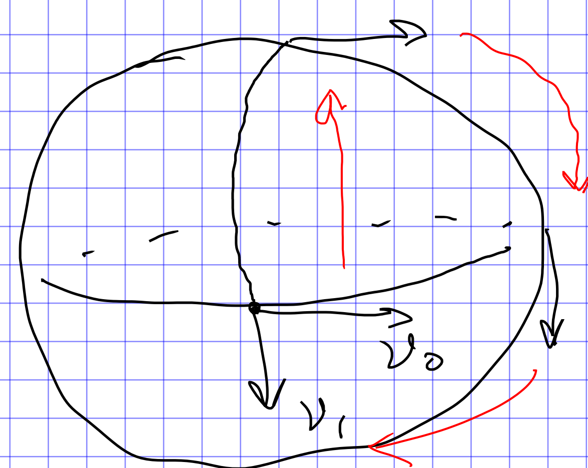
$$P = P_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_1)} : T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t_1)}M$$

dado por:

$$P(v_0) = v_1$$

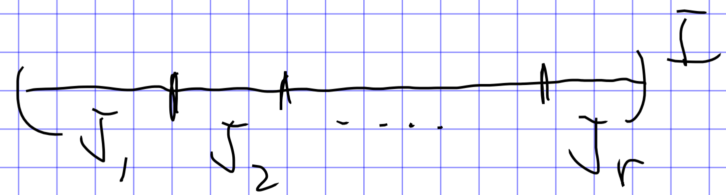
si $Z_{t_0} = v_0$, $Z_{t_1} = v_1$ y $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo.



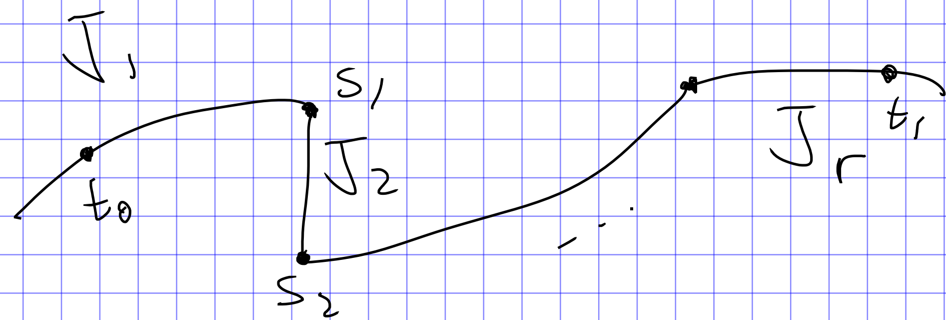


Curvas suaves a pedazos:

$\alpha: I \to M$ tal que:



$\alpha|_{J_i}$ es suave $\forall\ i = 1, \dots, r$



En estos casos el transporte paralelo se hace siguiendo los tramos suaves.

Lema:
Todo transporte paralelo

$$P : T_{\alpha(t_1)}M \longrightarrow T_{\alpha(t_2)}M$$

es isometría lineal.

Dem.:

$V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelos

$\Rightarrow$ $V + W$ paralelo.

$v_1 = V_{t_1}$, $w_1 = W_{t_1}$

$v_1 + w_1 = (V + W)_{t_1}$

Si V, W son paralelos, entonces:

$$v_2 = V_{t_2}, \quad w_2 = W_{t_2}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 + w_2 = (V+W)_{t_2}$$

$$\therefore \quad P(v_1 + w_1) = v_2 + w_2$$

$$= P(v_1) + P(w_1)$$

P isometría:

$V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelos:

$$\langle V, W \rangle' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$$

$$= 0$$

$\therefore \quad \langle V, W \rangle$ es constante.

$$\therefore \quad \langle V_{t_1}, W_{t_1} \rangle = \langle V_{t_2}, W_{t_2} \rangle \quad //$$

Geodésicas.

Definición: En una variedad pseudo-Riemanniana M una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ se dice geodésica si γ' $(\in \mathfrak{X}(\gamma))$ es paralelo.

Notación:
Para toda curva $\alpha : I \to M$ $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y denotamos:

$$\alpha'' = \frac{D\alpha'}{dt} \in \mathfrak{X}(\alpha).$$

y es llamado la aceleración.

$\therefore$ γ es geodésica $\Longleftrightarrow$ $\gamma'' \equiv 0$.

Corolario: En coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ en $U \subseteq M$ abierto en M, $\gamma : I \longrightarrow U \subseteq M$ es geodésica ssi $\forall h = 1, \dots, n$

$$\frac{d^2(x^h \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{h} \circ \gamma \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

El cual es un sistema de EDO en $x^1 \circ \gamma, \dots, x^n \circ \gamma$ en general no lineal.

Podemos concluir las siguientes propiedades.

1) $\forall\, p \in M,\ v \in T_pM$ $\exists$ una geodésica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \ni \gamma'(0) = v$. (en particular $\gamma(0) = p$).

2) Si $\alpha, \beta : I \longrightarrow M$ son geodésicas y $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$ para algún $t_0 \Rightarrow \alpha \equiv \beta$ en I.

3) $\forall\, p \in M,\ v \in T_pM\ \exists!$ geodésica maximal $\gamma_v : I_v \longrightarrow M \ni \gamma_v'(0) = v$.

maximal en el sentido de que si $\alpha : I \longrightarrow M$ es geodésica $\ni \alpha'(0) = v$ $\Rightarrow I \subseteq I_v$ y $\alpha = \gamma_v|_I$.