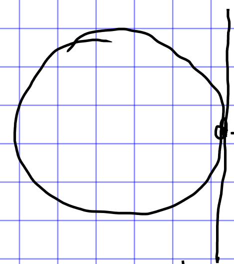
Ejemplos de exponencial.

$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ con la métrica heredada.

$\therefore \ T_1 S^1 = \mathbb{R}$



$\therefore \ \exp_1 : T_1 S^1 \longrightarrow S^1$

$$t \longmapsto e^{it}$$

En $GL(n,\mathbb{R})$ hay una métrica pseudo-Riemanniana tal que:

$$\exp_{I_n} : \overbrace{T_{I_n} GL(n,\mathbb{R})}^{M_{n\times n}(\mathbb{R})} \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

$$\exp_{I_n}(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

La métrica es la bi-invariante tal que:

$$\langle A, B\rangle_{I_n} = tr(AB)$$

Sea M pseudo-Riemanniana.
Fijamos $o \in M$ y sea
$v \in T_oM$.

$\therefore \quad \alpha(t) = \gamma_v(st) \qquad s \in \mathbb{R}$ fijo

$\Rightarrow \alpha$ es geodésica maximal con $\alpha'(0) = s\,\gamma_v'(0) = s\,v$.

$\therefore \quad \alpha = \gamma_{sv}$

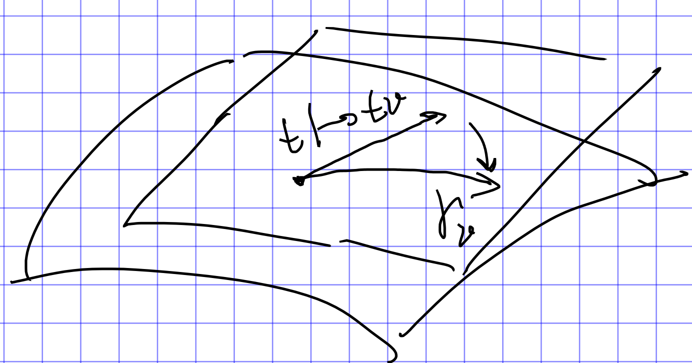
i.e. $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$

Por definición:

$$\exp_o(v) = \gamma_v(1)$$

pero además:

$$\exp_o(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t) \qquad \forall\, t \in I_v$$



Calculamos:

$$d(\exp_0)_0 : T_0 T_0 M \longrightarrow T_0 M$$

$$(\exp_0 : \mathcal{O} \cap T_0 M \longrightarrow M)$$

sabemos que:

$$T_0 T_0 M = T_0 M$$

Sea $\rho(t) = tv$.

$$\therefore \; d(\exp_0)_0 (v) =$$

$$= d(\exp_0)_0 (\rho'(0))$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_0(\rho(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_0(tv)$$

$$= \gamma_v'(0) = v$$

$$\therefore \; d(\exp_0)_0 = id_{T_0 M}.$$

Corolario: Para todo punto $0 \in M$, el mapeo exponencial $\exp_0$ es un difeomorfismo de una vecindad de 0 en T_oM sobre una vecindad de o en M.

En un espacio vectorial V un conjunto $S \subseteq V$ se dice estrellado (star-shaped) si:

$0 \in S$

$v \in S \Rightarrow tv \in S \quad \forall t \in [0,1]$

Definición:
En una variedad pseudo-Riemanniana M un abierto $\mathcal{U} \subseteq M$ se dice vecindad normal de $o \in M$ si:

*) $\exists\ \tilde{\mathcal{U}} \subseteq T_oM$ estrellado abierto

$\ni \exp_o : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$ es difeomorfismo.

Proposición:
Si $\mathcal{U}$ es vecindad normal de $o \in M$, entonces $\forall p \in \mathcal{U}$ $\exists!$ geodésica $\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}$

tal que $\sigma(0)=o$, $\sigma(1)=p$.
Más aún, $\sigma'(0)=\exp_o^{-1}(p)\in\tilde{\mathcal{U}}$.

Dem.:

$\tilde{\mathcal{U}}$ es abierto estrellado $\Rightarrow$:

$$\exp_o|_{\tilde{\mathcal{U}}}:\tilde{\mathcal{U}}\longrightarrow\mathcal{U}$$

es difeomorfismo.

Fijamos $p\in\mathcal{U}$. Sea $v\in\tilde{\mathcal{U}}$ dado por:

$$v=\exp_o^{-1}(p)$$

$\tilde{\mathcal{U}}$ estrellado $\Rightarrow$ $tv\in\tilde{\mathcal{U}}$ $\forall t\in[0,1]$

Luego $\sigma(t)=\exp_o(tv)\in\mathcal{U}$ $(t\in[0,1])$ es geodésica $\ni$ $\sigma(0)=o$, $\sigma(1)=p$, $\sigma'(0)=v$.

Así tenemos la existencia.

Para la unicidad sea $\tau:[0,1]\longrightarrow\mathcal{U}$ geodésica $\ni$ $\tau(0)=o$, $\tau(1)=p$.

Sea $w=\tau'(0)$.

$\therefore$ $\tau(t)=\gamma_w(t)=\exp_o(tw)$

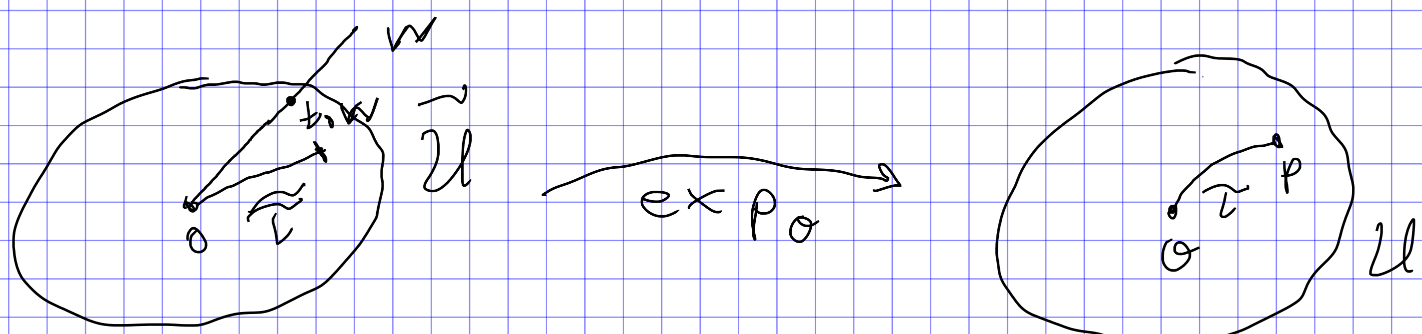
Además:

$$\exp_0(w) = \tilde{\tau}(1) = p = \sigma(1)$$
$$= \exp_0(v)$$

¿$tw \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \forall t \in [0,1]$?

Como $0 \in \tilde{\mathcal{U}}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ abierto
$tw \in \tilde{\mathcal{U}}$ con $t << 1$.

Si el rayo $t \longmapsto tw$
$t \in [0,1]$ abandona $\tilde{\mathcal{U}}$ entonces:



$\tau([0,1])$
compacto

$\exists \ t_0 \in (0,1) \ni$:

$$t_0 w \in \tilde{\mathcal{U}}, \quad \exp(t_0 w) \in \mathcal{U} \setminus \tau([0,1])$$
$$\tau(t_0) \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

$\therefore \ tw \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \forall t \in [0,1]$

$\therefore \ w \in \tilde{\mathcal{U}}$

Luego:

$$\exp_o(w) = \tau(1) = p = \sigma(1)$$
$$= \exp_o(v)$$

$$\Rightarrow \quad w = v \quad \Rightarrow \quad \tau = \sigma. \quad //$$

Como consecuencia tenemos:

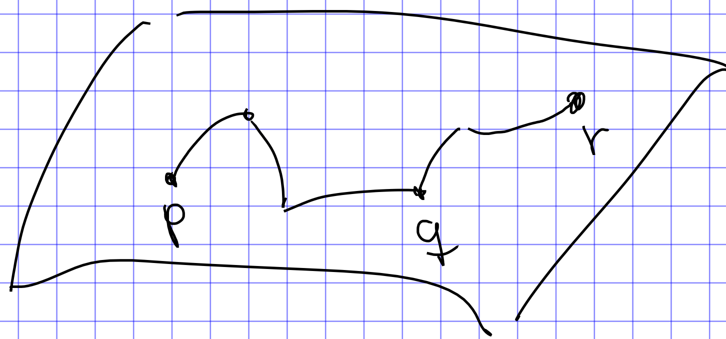
Corolario: En una variedad pseudo-Riemanniana conexa cualesquiera dos puntos se pueden unir con una geodésica a pedazos (broken geodesic) o geodésica quebrada.

Dem.:

$\forall p, q \in M$ definimos:

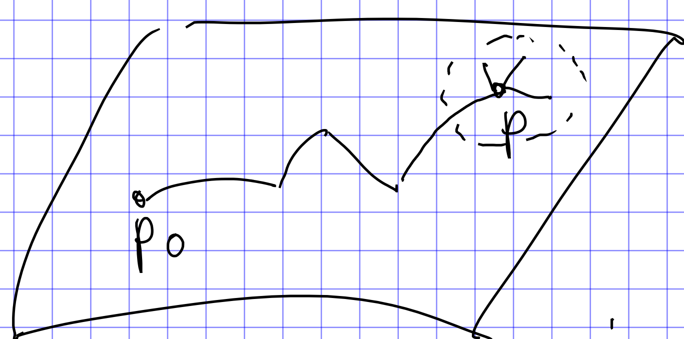
$p \sim q \iff \exists \; \gamma : [a,b] \to M$
suave a pedazos
$\Rightarrow \exists \; a = a_0 < a_1 < \ldots$
$< a_n = b$

$\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ es geodésica $\forall j = 0, \dots, n-1$.



$\therefore \sim$ es relación de equivalencia.

Por la proposición anterior las clases de equivalencia son abiertas!



$\mathcal{U}$ vec. normal de p

$\therefore p \sim p_0$

$\Rightarrow q \sim p_0 \; \forall q \in \mathcal{U}$.

$\therefore$ M conexa $\Rightarrow$ hay solamente una clase de equivalencia. //

Coordenadas normales:

M pseudo-Riemanniana

$o \in \mathcal{U}$ $\mathcal{U}$ vecindad normal de o.

Sea $e_1, \dots, e_n$ base ortonormal de T_oM.

Las coordenadas normales son dadas por:

$$\xi = (x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tales que:

$$p \in \mathcal{U}, \ \exp_o^{-1}(p) \in \tilde{\mathcal{U}}$$

$$\exp_o^{-1}(p) = \sum_{j=1}^{n} x^j(p)\, e_j$$

Si $f^1, \dots, f^n$ es la base dual de $e_1, \dots, e_n$, entonces:

$$v = \exp_o^{-1}(p)$$

$$\therefore \quad x^i(p) = x^i(\exp_o(v)) = f^i(v)$$

$$\therefore \quad x^i \circ \exp_o = f^i$$

En estas coordenadas tenemos:

$$\exp_0(tv) = \gamma_v(t)$$

$$v \in \tilde{\mathcal{U}}$$
$$t \in [0,1]$$

Si $v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$, entonces:

$$x^i(\gamma_v(t)) = t\, a^i = t\, f^i(v)$$

Luego:

$$v = \gamma_v'(0) = \sum_{i=1}^{n} (x^i \circ \gamma_v)'(0) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0 = e_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Por tanto:

$$g_{ij}(0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_0 \right\rangle$$

$$= \langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

Por otro lado:

$$x^i \circ \gamma_v(t) = t a^i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

y la ecuación geodésica en o:

$$\frac{d^2(x^i \circ \gamma_v)}{dt^2}(0) + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(o) \frac{d(x^j \circ \gamma_v)}{dt}(0) \frac{d(x^k \circ \gamma_v)}{dt}(0) = 0$$

se reduce a:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(o)\, a^j a^k = 0 \quad \forall i.$$

lo cual se cumple $\forall (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\therefore \quad \Gamma^i_{jk}(o) = 0 \qquad \forall i, j, k.$$

Corolario: En coordenadas normales de o: $\forall i, j, k$:

(1) $g_{ij}(o) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, (2) $\Gamma^k_{ij}(o) = 0$

Por ejemplo, si $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$ entonces en θ:

$$A^i_{jk;m}(\theta) = \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial x^m}(\theta)$$