Proposición: (2da de Bianchi)
$\forall x, y, z \in T_pM$, $p \in M$:

$$(D_z R)(x,y) + (D_x R)(y,z) + (D_y R)(z,x) = 0$$

Dem.:

Sea $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ vecindad de p $\ni$:

$$X_p = x, \quad Y_p = y, \quad Z_p = z$$

Recordamos que:

$$(D_Z R)(X,Y)V =$$
$$= D_Z(R(X,Y)V) - R(D_Z X, Y)V - R(X, D_Z Y)V - R(X,Y)D_Z V$$

Escogemos $\mathcal{U}$ con coordenadas normales de modo que:

$$\Gamma_{ij}^{h}(p) = 0, \quad (D_{\partial_i}\partial_j)_p = \sum_{h=1}^{n} \Gamma_{ij}^{h}(p)\,\partial_h\big|_p = 0$$

X, Y, Z combinación lineal real de los ∂_i's.

$$\therefore (D_Z X)_p = 0 = (D_Z Y)_p$$

$\therefore$ en p:

$$(D_Z R)(X,Y)V =$$
$$= D_Z(R(X,Y)V) - R(X,Y)D_Z V$$

Luego en p:

$$(D_Z R)(X,Y) = [D_Z, R(X,Y)]$$
$$= [D_Z, [D_Y, D_X]]$$
$$([X,Y]=0)$$

Entonces en p:

$$(D_Z R)(X,Y) + (D_X R)(Y,Z) + (D_Y R)(Z,X)$$
$$= [D_Z, [D_Y, D_X]] + [D_X, [D_Z, D_Y]]$$
$$+ [D_Y, [D_X, D_Z]] = 0$$

que se anula por Jacobi de operadores.

Coordenadas y R:

Sean $(x^1, \dots, x^n)$ coordenadas en $\mathcal{U}$. Entonces en $\mathcal{U}$ las componentes de R son:

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl}\,\partial_i$$

Lema: Con la notación anterior:

$$R^i_{jhl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jh}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^h} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{jh} - \sum_{m=1}^{n} \Gamma^i_{hm} \Gamma^m_{jl}$$

Dem.:
Usar:

$$R_{\partial_h \partial_l}(\partial_j) = D_{\partial_l}(D_{\partial_h} \partial_j) - D_{\partial_h}(D_{\partial_l} \partial_j)$$

//

Curvatura seccional.

M pseudo-Riemanniana

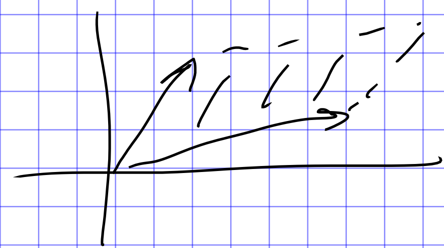
R tensor, pero queremos un número como curvatura.

Para todo $\Pi \subseteq T_pM$ subespacio 2-dimensional medimos la curvatura.

$\forall v, w \in \Pi$ base denotamos:

$$Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2$$
$$= \det\begin{pmatrix} \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle v,w\rangle & \langle w,w\rangle \end{pmatrix}$$

= área con signo de:



$$= \det\left(g_p|_{\Pi\times\Pi}\right)$$

Definición/Lema:

$\forall\ \Pi^2 \subseteq T_pM$ nodegenerado el número:

$$K(v,w) = \frac{\langle R_{vw}(v), w\rangle}{Q(v,w)}$$

v, w base de Π, no depende de la base. Se llama la curvatura seccional $K(\Pi)$.

Dem.:

Si x, y es otra base $\exists$:

$$v = ax + by$$
$$w = cx + dy$$

entonces:

$$\langle R_{v,w}(v), w\rangle = (ad-bc)^2 \langle R_{xy}(x), y\rangle$$
$$Q(v,w) = (ad-bc)^2\, Q(x,y) \quad //$$

Lema: $\forall\, v, w \in T_pM$ $\exists\, \bar{v}, \bar{w} \in T_pM$ arbitrariamente cercanos a v, w, resp., $\ni$

$$Q(\bar{v}, \bar{w}) \neq 0.$$

Proposición:

Si $K = 0$ en $p \in M$, entonces $R_p = 0$

($K = 0$ en $p \in M$ es:

$K(\Pi) = 0 \quad \forall\, \Pi \subseteq T_pM$ 2-dim. no-deg.)

Dem.:

(1) $\langle R_{vw} v, w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in T_pM$.

Por la def. de K esto se cumple si v, w generan un plano no-degenerado. Por continuidad de formas multilineales (1) se sigue del lema.

(2) $R_{vw} v = 0 \quad \forall v, w \in T_pM$.

Polarizamos:

$$0 = \langle R_{v, w+x} v, w+x \rangle$$
$$= \cancel{\langle R_{vw} v, w \rangle}^{0} + \cancel{\langle R_{vx} v, x \rangle}^{0}$$
$$+ \langle R_{vx} v, w \rangle + \langle R_{vw} v, x \rangle$$
$$= 2 \langle R_{vw} v, x \rangle \quad \forall x$$
$$\therefore \; R_{vw} v = 0$$

(3) $R_{vw} x = R_{wx} v \quad \forall v, x, w$

Se prueba polarizando en v.

(4) $R_{vw} x = 0 \quad \forall v, w, x$.

Por 1a de Bianchi:

$$0 = R_{vw}X + R_{wx}v + R_{xv}w$$

$$= 3R_{vw}X.$$

Def.: M pseudoRiemanniana se dice plana $\iff K(\Pi) = 0 \quad \forall\, \Pi^2 \subseteq T_pM$ no deg. $p \in M$

$(\iff R \equiv 0)$ (flat)

$\mathbb{R}^n_r$ con la métrica usual es plana.

Def.: Una forma multilineal

$$F : (T_pM)^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice de tipo curvatura (curvature-like) si satisface las simetrías del tensor de curvatura:

$$\langle R_{vw}X, Y\rangle$$

Corolario: M pseudoRiem.

Si $F : (T_pM)^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de tipo curvatura y satisface:

$$K(u,v) = \frac{F(u,v,u,v)}{Q(u,v)}$$

$$\Rightarrow \langle R_{vw}x, y \rangle = F(v,w,x,y) \quad \forall v,w,x,y$$

Dem.:

Se considera:

$$\Delta(v,w,x,y) =$$
$$= \langle R_{vw}x, y\rangle - F(v,w,x,y)$$

Por hipótesis:

$$\Delta(v,w,v,w) = 0 \quad \forall v,w$$

Esto implica $\Delta \equiv 0$ por las simetrías de curvatura.

//

Corolario:
Si M tiene curvatura constante C, entonces:

$$R_{xy}z = C(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x)$$

$\forall p \in M$, $x, y, z \in T_pM$.

Dem.: Usando el corolario anterior y:

$$F(v,w,x,y) =$$
$$= C(\langle v,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle v,y\rangle\langle x,w\rangle)$$

$\longrightarrow$) Revisar Semi-Riemannian Surfaces, páginas 80-81.

Cambio de tipo
(type changing)
contracción métrica

Sea M pseudo-Riemanniana con métrica $g = \langle\, ,\rangle$.
Sabemos que existe un isomorfismo:

$$I_0^1 = \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M) = I_1^0$$
$$X \longmapsto g(X, \cdot) = X^*$$

Esto nos permite la siguiente construcción:

$$A \in I_s^r(M) \qquad 1 \leq a \leq r$$
$$1 \leq b \leq s+1$$

$\downarrow_b^a A \in I_{s+1}^{r-1}(M)$ es dado por:

$$(\downarrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) =$$
$$= A(\theta^1, \dots, \underset{\uparrow\ a\text{-entrada}}{X_b^*}, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, \widehat{X_b}, \dots, X_{s+1})$$

Ejemplo:

$R \in \mathcal{I}^1_3(M)$

$R_{XY}Z \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$\langle R_{XY}Z, W \rangle$ está en $\mathcal{I}^0_4(M)$.

$R \in \mathcal{I}^1_3(M)$:

$R(\theta, X, Y, Z) = \theta(R_{XY}Z)$

$(\downarrow^1_4 R)(X, Y, Z, W) =$

$= R(W^*, X, Y, Z)$

$= g(W, R_{XY}Z)$ en $\mathcal{I}^0_4(M)$

Notación: $\downarrow^a_b$ se llama cambio de tipo.