Variedades Producto.

Sean M, N variedades.
Entonces $\forall (p_0, q_0) \in M \times N$:

$$T_{(p_0,q_0)} M \times N = T_{p_0}M \times T_{q_0}N$$

$M : (x^1, \dots, x^m)$; $N : (y^1, \dots, y^n)$
$\Rightarrow$ $M \times N$ tiene coordenadas:

$$(x^1, \dots, x^m) \times (y^1, \dots, y^n)(p,q) =$$
$$= (x^1(p), \dots, x^m(p), y^1(q), \dots, y^n(q))$$

$$\therefore \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{p_0}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_{p_0}, \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{q_0}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_{q_0}$$

es base de $T_{(p_0,q_0)} M \times N$.

En particular, tenemos mapeos $\mathbb{R}$-lineales:

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M \times N)$$
$$X \longmapsto \tilde{X}$$

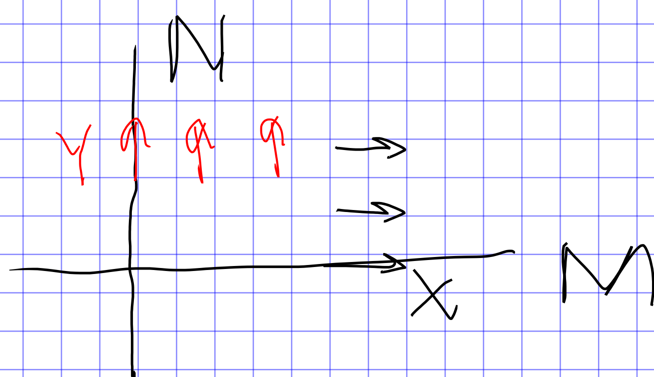
$$\tilde{X}_{(p,q)} = X_p \quad \forall (p,q)$$

$$\mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}(M\times N)$$

$$Y \longmapsto \tilde{Y}$$

$$\tilde{Y}_{(p,q)} = Y_q \quad \forall (p,q)$$

Se escribe en lo sucesivo X, Y en vez de $\tilde{X}, \tilde{Y}$.



Sean M, N pseudo-Riemannianas y por tanto $M\times N$ pseudo-Riemanniana, con conexiones:

$$M \longleftrightarrow {}^{M}D, \quad N \longleftrightarrow {}^{N}D$$

$$M\times N \longleftrightarrow D$$

Entonces: (por Koszul)

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$D_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{{}^{M}D_X Y}$$

$\forall\ V, W \in \mathfrak{X}(N)$

$$D_{\tilde{V}} \tilde{W} = \widetilde{{}^N D_V W}$$

$\forall\ X \in \mathfrak{X}(M),\ V \in \mathfrak{X}(N)$

$$D_{\tilde{V}} \tilde{X} = 0 = D_{\tilde{X}} \tilde{V}$$

Además de Koszul se usa:

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = \widetilde{[X_1, X_2]} \qquad X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$$

$$[\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2] = \widetilde{[Y_1, Y_2]} \qquad Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$$

Se obtiene como consecuencia:

*) $\gamma = (\alpha, \beta) : I \longrightarrow M \times N.$

$$\mathfrak{X}(\gamma) = \mathfrak{X}(\alpha) \times \mathfrak{X}(\beta)$$

$$\frac{{}^\gamma D}{dt} = \frac{{}^\alpha D}{dt} \times \frac{{}^\beta D}{dt}$$

$$\tau^\gamma = \tau^\alpha \times \tau^\beta$$

γ es geodésica $\iff$ α, β son geodésicas.

De hecho:

$\gamma' = (\alpha', \beta')$, $\gamma'' = (\alpha'', \beta'')$

Luego $M \times N$ es completa $\Longleftrightarrow$ M, N son completas.

Para la curvatura:

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$
$$U, V, W \in \mathfrak{X}(N)$$

$$R_{\tilde{X}\tilde{Y}}\tilde{Z} = \widetilde{{}^{M}R_{XY}Z}, \quad R_{\tilde{U}\tilde{V}}\tilde{W} = \widetilde{{}^{N}R_{UV}W}$$

R es cero en cualquier otra combinación de argumentos:

$$R_{XV}Z = R_{UY}W = \dots = 0$$

En particular:

$$K^{M\times N}(u, v) = 0$$

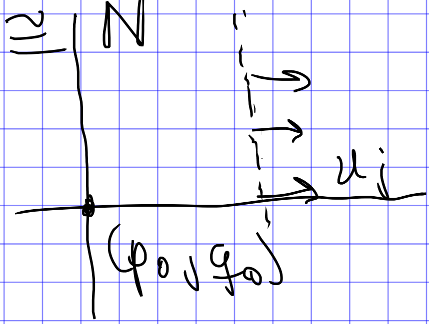
si $u \in T_pM$, $v \in T_qN$.

También:

$$K^{M\times N}(u_1, u_2) = K^{M}(u_1, u_2)$$
$$K^{M\times N}(v_1, v_2) = K^{N}(v_1, v_2)$$

$u_1, u_2 \in T_pM$, $v_1, v_2 \in T_qN$.

$(\{p_0\} \times N) \cong N$



$M \; (\cong M \times \{q_0\})$

Isometrías locales.

Si M, N son variedades pseudo-Riemannianas, entonces una isometría local φ de M a N es un mapeo suave:

$$\varphi : \underset{\text{abierto}}{U \subseteq M} \longrightarrow \underset{\text{abierto}}{V \subseteq N}$$

$\ni \varphi : U \longrightarrow V$ es isometría, es decir:

$$\langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)} = \langle u, v \rangle_p$$

(en N) (en M)

$\forall p \in U$, $u, v \in T_pM$. Se pide además que $\varphi : U \longrightarrow V$ sea difeomorfismo.

Hecho importante: Toda isometría (local) preserva los objetos considerados:

g, D, R, Ric, S, geodésicas, exp

Que las isometrías preservan g es claro.

Proposición:
Si $\varphi : M \longrightarrow N$ es isometría, entonces φ preserva la conexión de Levi-Civita:

$$d\varphi(D_X Y) = D_{d\varphi(X)} d\varphi(Y)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dem.:
Recordamos que:

$$d\varphi(X)_{\varphi(p)} = d\varphi_p(X_p)$$

$$d\varphi(X)_q = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(X_{\varphi^{-1}(q)})$$

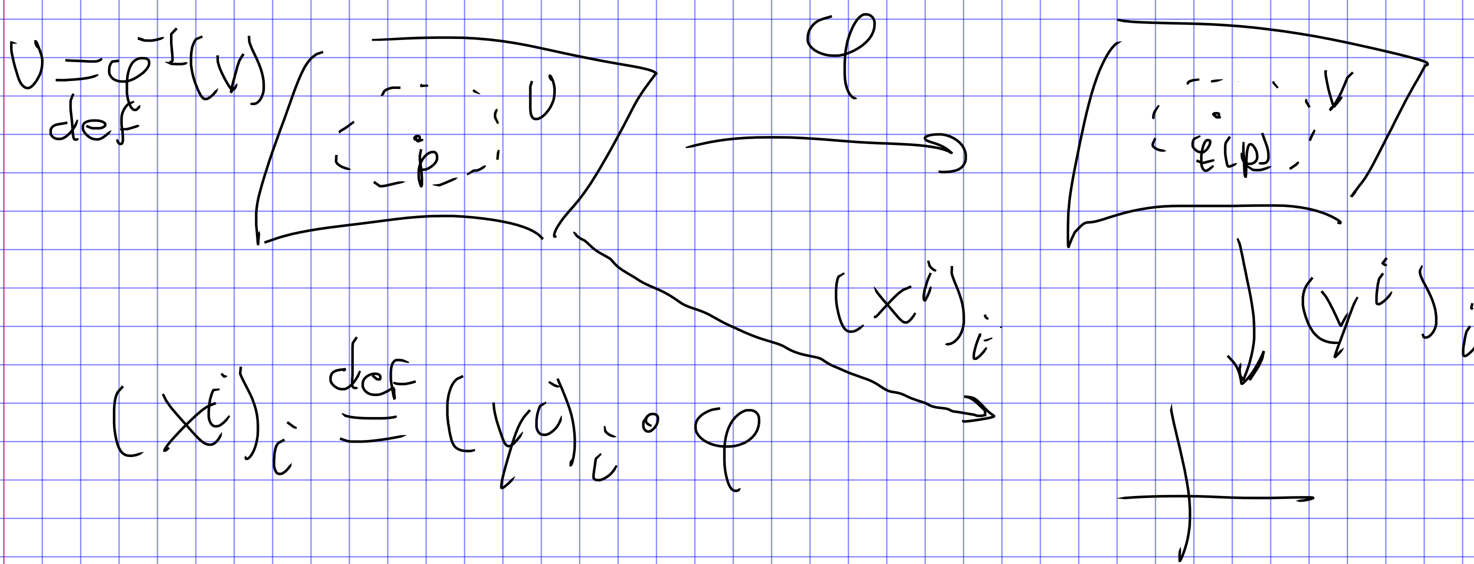
Basta checar la conclusión en $p \in M$ dado. Como φ es difeomorfismo existen coordenadas:

$(x^1, \dots, x^n)$ alrededor de p en M

$(y^1, \dots, y^n)$ alrededor de $\varphi(p)$ en N tales que:

$$y^i(\varphi(q)) = x^i(q) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\forall q$ en una vec. de p.



$$(x^i)_i \overset{def}{=} (y^i)_i \circ \varphi$$

Entonces:

$$d\varphi_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{\varphi(q)}$$

$\forall i, q$.

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y = d\varphi(X)$, entonces:

$$\begin{aligned} y^i(\varphi(q)) &= Y_{\varphi(q)}(y^i) \\ &= d\varphi_q(X_q)(y^i) \\ &= X_q(y^i \circ \varphi) \end{aligned}$$

$$= X_q(x^i) = X^i(q)$$

Además:

$$g^N_{ij}(\varphi(q)) = g^N_{\varphi(q)}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{\varphi(q)}, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\varphi(q)}\right)$$

$$= g^N_{\varphi(q)}\left(d\varphi_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q\right), d\varphi_q\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_q\right)\right)$$

$$= g^M_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_q\right) = g^M_{ij}(q).$$

De aquí concluimos que:

$${}^N\Gamma^k_{ij}(\varphi(q)) = {}^M\Gamma^k_{ij}(q)$$

usando la fórmula:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)$$

Luego usando $y^i \circ \varphi = x^i$ y la fórmula de D en términos de Γ^k_{ij} se tiene

$$d\varphi(D_X Y) = D_{d\varphi(X)} d\varphi(Y)$$

//

Si $\varphi : M \longrightarrow N$ es isométrica, entonces la proposición anterior nos permite concluir:

$$d\varphi({}^M R_{XY} Z) =$$

$$= d\varphi({}^M D_{[X,Y]} Z - [{}^M D_X, {}^M D_Y] Z)$$

$$= {}^N D_{d\varphi([X,Y])} d\varphi(Z)$$

$$- d\varphi({}^M D_X {}^M D_Y Z)$$

$$+ d\varphi({}^M D_Y {}^M D_X Z)$$

$$= {}^N D_{[d\varphi(X), d\varphi(Y)]} d\varphi(Z)$$

$$- [{}^N D_{d\varphi(X)}, {}^N D_{d\varphi(Y)}] d\varphi(Z)$$

$$= {}^N R_{d\varphi(X), d\varphi(Y)} d\varphi(Z)$$

En particular:

$${}^M K(u,v) = {}^N K(d\varphi(u), d\varphi(v))$$

$\forall p \in M,\ u, v \in T_p M.$

Además, si:

$$(\alpha : I \longrightarrow M) \longmapsto (\varphi \circ \alpha : I \longrightarrow N)$$

entonces:

$$\mathfrak{X}(\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}(\varphi \circ \alpha)$$
$$Z \longmapsto d\varphi(Z)$$

y además:

$$(d\varphi(Z))' = d\varphi(Z')$$

$\therefore$ Z paralelo $\iff$ $d\varphi(Z)$ paralelo.

$\therefore$ α geodésica $\iff$ $\varphi \circ \alpha$ geodésica.

En particular:

$$\varphi(\underbrace{\exp_p(v)}_{\gamma_v(1)}) = \underbrace{\exp_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v))}_{\gamma_{d\varphi_p(v)}(1)}$$

pues de hecho:

$$\varphi \circ \gamma_v = \gamma_{d\varphi(v)}$$

El diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "d\varphi_p"] \arrow[d, "\exp_p"] & T_{\varphi(p)}N \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\
M \arrow[r, "\varphi"] & N
\end{tikzcd}$$

conmuta.