Grupos de Lie.

En matemáticas se trabaja con:

*) Conjuntos y elementos.

*) Estructuras.

*) Homomorfismos.
Isomorfismos. ←

Principio general:

El conjunto de todos los isomorfismos de un objeto geométrico, algebraico, topológico, etc. es un grupo.

Nos interesa considerar grupos G con estructura adicional.

A un grupo G le queremos asociar:

Geometría, topología, análisis

El principal ejemplo en análisis es la medida de Lebesgue:

$\mathbb{R}^n$ es grupo aditivo y la medida de Lebesgue μ is la única medida en conjuntos de Borel invariante bajo traslaciones. La unicidad de μ es hasta normalización.

La transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$ (análisis armónico clásico) se basa en este hecho y en la estructura de grupo de $\mathbb{R}^n$.

Transformada de Fourier:

$f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \underbrace{e^{-ix\cdot\xi}}\, d\mu(x)$$

$$= \langle \underset{L^1}{f}, \underset{L^\infty}{\overline{e_\xi}} \rangle \leftarrow$$ ev. de funcionales

$$e_\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}$$

$$e_\xi(x) = e^{ix \cdot \xi}$$

$\{e_\xi\}_{\xi \in \mathbb{R}^n}$ constituye el conjunto de todos los homomorfismos continuos de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}$.

$\longrightarrow$) Esto lleva más adelante a la medida de Haar.

En cuanto a geometría:

Consideramos $\mathbb{R}^n$ Euclideano.
¿Cuáles son las isometrías de $\mathbb{R}^n$?

Sol.: Las biyecciones que preservan distancia en $\mathbb{R}^n$ son de la forma:

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto Ax + x_0$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $AA^T = I_n$.

El grupo de isometrías es:

$$O(n) \times \mathbb{R}^n$$

$$\left(O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n \} \right)$$

con la operación:

$$(A, x_0)(B, y_0) = (AB, Ay_0 + x_0)$$

Vemos que $O(n) \times \mathbb{R}^n$ es variedad diferenciable.

$$O(2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \det(A) = 1.}}{SO(2)} \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} SO(2)$$

$SO(2)$: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in \mathbb{R}$

$\therefore SO(2) \cong \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$.

$O(n) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ es subvariedad suave.

Afirmación: $O(n)$ es la imagen inversa de un valor regular.

$$F: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$$
$$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

$$F(A) = AA^T$$

F es suave, I_n es valor regular y
$$O(n) = F^{-1}(I_n).$$

Valor regular:
$\forall A \in F^{-1}(I_n)$
$$dF_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$$
es sobre.

Se calcula:
$$dF_A(B) = AB^T + BA^T$$

Dada $C \in S_n(\mathbb{R})$, hallar B $\ni$:

$$AB^T + BA^T = C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^T$$

Tomamos:

$$B = \frac{1}{2}C^T(A^T)^{-1}$$

$$\therefore \quad BA^T = \frac{1}{2}C^T \qquad \therefore \ dF_A(B) = C.$$
$$AB^T = \frac{1}{2}C$$

$\therefore$ I_n es valor regular de F

$\therefore$ $O(n)$ es variedad.

Mas generalmente:

Tma.: Sea M variedad Riemanniana. Entonces, $Iso(M)$ (el grupo de isometrías de M) admite una única estructura diferenciable tal que:

*) la topología es la

compacta-abierta.

*) $\varphi \circ \psi$, φ^{-1} son operaciones suaves.

($\mathrm{Iso}(M)$ es grupo de Lie).

*) $$\begin{aligned} \mathrm{Iso}(M) \times M &\longrightarrow M \\ (\varphi, x) &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

es suave.

www.cimat.mx/~quiroga