Helgason prueba que:

G grupo de Lie (no necesariamente 2do numerable) $\Rightarrow$ G_0 2do numerable.

Pero hay resultados similares para variedades en general:

M variedad conexa metrizable (no necesariamente 2do numerable) $\Rightarrow$ M 2do numerable

Ver Kobayashi-Nomizu o usar métricas Riemannianas.

Ejemplos de grupos recubridores (covering groups):

1) $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
$\theta \longmapsto e^{i\theta}$

2) Hay un mapeo recubridor
$S^3 \cong SU(2) \longrightarrow SO(3) \cong \mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

$\pi_1(U(2)) = e$, $\pi_1(O(3)) = \mathbb{Z}_2$

$SU(2)$: $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$

$$A^*A = I_2 \,,\quad \det(A) = 1$$

$$A \in SU(2) \iff A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

$(\alpha,\beta), (\gamma,\delta)$ ortonormal en $\mathbb{C}^2$.

$$\alpha\delta - \gamma\beta = 1$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

$\therefore$
$$S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \longrightarrow SU(2)$$
$$(\alpha,\beta) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

es homeomorfismo.

Observación:
Sea $\varphi: G \longrightarrow H$ homomorfismo entre grupos de Lie (suaves o analíticos)
Se puede probar que si φ es continuo entonces φ es suave (o analítico, resp.)

Las traslaciones:

$$L_p, R_p : G \longrightarrow G$$
$$L_p(g) = pg$$
$$R_p(g) = gp$$

$$L_p : G \longrightarrow G$$
$$d(L_p)_g : T_gG \longrightarrow T_{pg}G$$

Sobre acciones en campos:

$\varphi : G \longrightarrow G$ difeomorfismo

$Z \in \mathfrak{X}(G)$ campo vectorial

¿ $d\varphi(Z) \in \mathfrak{X}(G)$

$$(d\varphi(Z))_g = d\varphi_{\varphi^{-1}(g)}(Z_{\varphi^{-1}(g)})$$

Si $X = d\varphi(Z)$, entonces decimos que X y Z están φ-relacionados: $X \sim_\varphi Z$.

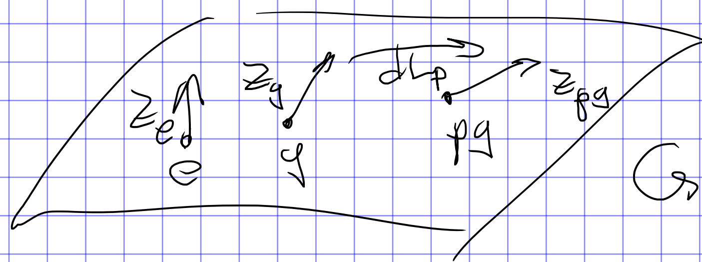
Para la definición left-invariant:

$$dL_p(Z) = Z \quad \forall p \in G.$$

$$\Longleftrightarrow \quad d(L_p)_{p^{-1}g}(Z_{p^{-1}g}) = Z_g \quad \forall p, g.$$

$(g \longleftrightarrow pg)$

$$\iff d(L_p)_g(Z_g) = Z_{pg} \quad \forall\, p, g.$$



$$\iff d(L_g)_e(Z_e) = Z_g \quad \forall\, g$$

$X \in T_eG$, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$, $f \in C^\infty(G)$, $p \in G$:

$$\underline{(\tilde{X}f)(p)} = \tilde{X}_p(f) = d(L_p)_e(X)(f)$$

$$= X(f \circ L_p) = \underline{X(f^{L_{p^{-1}}})}$$

$$(f^\varphi = f \circ \varphi^{-1})$$

$$= d(f \circ L_p)_e(X)$$

$$= df_p \circ d(L_p)_e(X)$$

γ curva $\ni$ $\gamma'(0) = X$.

$$= df_p \circ d(L_p)_e(\gamma'(0))$$

$$= \underline{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p\gamma(t))}$$