En la proposición 1.9 se construye:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "X \mapsto \tilde{X} = X"] \arrow[dr, "X \mapsto X^*"'] & D(G) \arrow[r, hook, "p"'] & C^\infty(G) \\ & U(\mathfrak{g}) \arrow[u, dashed, "p^*"'] & \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad p^*(X^*) = p(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Se prueba que:

$$p^* : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow D(G) \quad \text{(sobre)}$$

mapea: $\quad p^*(X^*(M)) = X(M)$

$\{X^*(M)\}_M$ genera linealmente a $U(\mathfrak{g})$

$\{X(M)\}_M$ es l.i. en $D(G)$.

$\therefore$ ambos conjuntos son base

$\therefore$ p^* es isomorfismo

Una consecuencia:

$$\mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$$
$$X \longmapsto X^*$$

es lineal inyectivo, pues mapea la base $X_1, \ldots, X_n$ en el conjunto l.i.:

$$X_j^* = X^*(0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \ldots, 0), \quad j = 1, \ldots, n$$

Observación: El Teorema de Ado dice que si $\mathfrak{a}$ es álgebra de Lie de $\dim_{\mathbb{R}} < +\infty$, entonces $\exists$

$$\varphi : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$$

homomorfismo 1-1. De aquí y de resultados posteriores veremos que $\exists$ $H \leq GL(N, \mathbb{R})$ subgrupo de Lie $\ni$.

$$\mathfrak{a} \overset{\varphi}{\cong} \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$$

Ejemplo de isomorfismo local

$$\mathbb{R} \cong S^1 \text{ \underline{localmente}}$$

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S^1$$
$$\varphi(x) = e^{ix}$$

$0 < \varepsilon < \pi$, viene del mapeo recubridor

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto e^{ix} \end{aligned}$$

En general sea G grupo de Lie conexo y

$$\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$$

el recubrimiento universal.
$\therefore$ $\tilde{G}$ es variedad.
$\tilde{G}$ se convierte en grupo de Lie con π isomorfismo local levantando las operaciones.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[r, dashed, "\tilde{m}"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] \arrow[dr] & \tilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G \\[-20pt]
(g, h) \arrow[r, mapsto] & gh
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{G} \arrow[r, dashed, "\widetilde{inv}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr] & \tilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
G \arrow[r, "inv"] & G \\[-20pt]
g \arrow[r, mapsto] & g^{-1}
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow \quad \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ $\qquad\qquad$ $\widetilde{inv}(\tilde{e}) = \tilde{e}$

donde $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ es fijo.

Lema 1.12

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "d\varphi_e"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{k} \arrow[d, "\exp"] \\
H \arrow[r, "\varphi"] & K
\end{tikzcd}
\quad \text{conmuta}
$$

φ homomorfismo

$\Longrightarrow$ $d\varphi_e$ homomorfismo

Para la última parte de la demostración del Tma. 1.11 se sigue el siguiente esquema.

queremos $G \overset{loc}{\cong} G' \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$

Si $G \overset{\varphi}{\cong} G'$ globalmente

$\Rightarrow d\varphi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ es isomorfismo.

¿cómo pasar de local a global?

Tenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\varphi", "\overset{\sim}{\text{local}}"'] & & G' \\
\tilde{G} \arrow[u, "\pi", "\overset{\sim}{\text{local}}"'] \arrow[rr] & & \tilde{G}' \arrow[u, "\pi'"', "\overset{\sim}{\text{local}}"]
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ Θ isomorfismo local

Chevalley prueba que $\exists$ $\tilde{\Theta} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}'$ isomorfismo global.

$\tilde{\Theta}$ se obtiene por extensión a lo largo de curvas.