Sea $X \in T_{I_n} GL(n, \mathbb{R})$.

$$\tilde{X} = ?$$

$$\tilde{X}_A = d(L_A)_{I_n}(X)$$

donde $L_A(B) = AB$, que es $\mathbb{R}$-lineal y por tanto

$$d(L_A)_B = L_A$$

$$\therefore \quad \tilde{X}_A = AX$$

(Comparar con la traslación:

$$T_A : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$T_A(B) = B + A$$

$$\therefore \quad d(T_A)_B = Id$$

$$\therefore \quad d(T_A)_B(X) = X \quad)$$

Para hallar $[\ ,\ ]$ en $Lie(GL(n, \mathbb{R}))$

$$[X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{I_n}$$

$\tilde{X}$ como campo vectorial:

$$\tilde{X}_A = AX = \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_{hj}\right)_{i,j=1}^{n}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_{hj}\right) E_{ij} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{como}\\ \text{campo vect}\end{array}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_{hj}\right) \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

$$\tilde{Y}_A = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} y_{hj}\right) \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

y calculamos las componentes de:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{I_n} = (\quad)_{ij}$$

Caso particular:

$$n = 1, \quad GL(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$x \in T_1 \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$$

$$\tilde{X}_r = rx = rx\frac{d}{dr}$$

Vemos que:

$$\tilde{X}_{I_n}(a_{ij}) = x_{ij} \Leftarrow \text{componentes de } X$$

Ejemplo de subgrupos de Lie.

Sea $G = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{C}^2$

Sea $H = \mathbb{R}$ con el mapeo:

$$\varphi_c : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$x \longmapsto (e^{ix}, e^{icx})$$

$c \in \mathbb{R}$.

$c \in \mathbb{Q} \implies \exists!\, x_0 > 0$ tal que

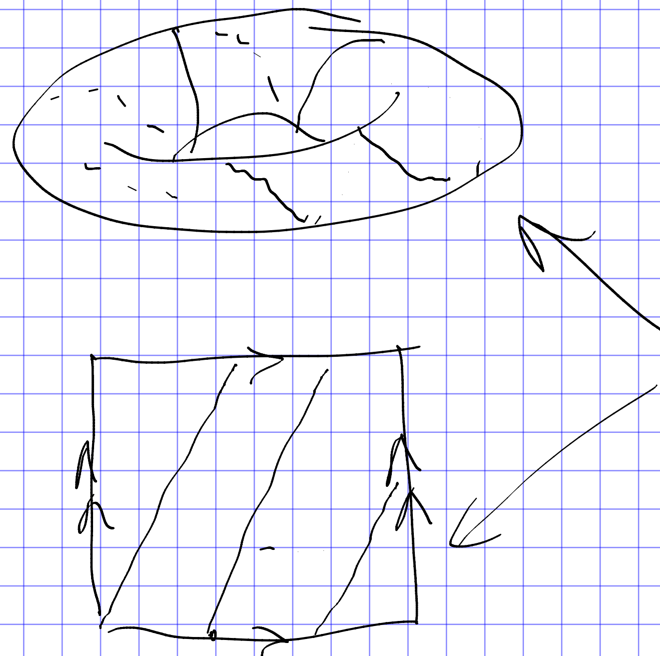
$$\varphi_c|_{[0,x_0)} \text{ es } 1-1$$

$$\varphi_c([0,x_0]) = \varphi_c(\mathbb{R})$$

$$\varphi_c(0) = \varphi_c(x_0)$$

y en este caso se induce:

$$S^1 \xrightarrow{\varphi_c} S^1 \times S^1$$



se cierra en ambos dibujos

$c \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \varphi_c$ es inyectiva con imagen densa y no es homeomorfismo a su imagen

---

Sea H subgrupo de Lie de G vía:

$$\varphi : H \longrightarrow G$$

Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "d\varphi_e"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\
H \arrow[r, "\varphi"] & G
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ φ es homomorfismo de grupos de Lie

$\therefore$ $d\varphi_e$ es homomorfismo de álgebras de Lie y $d\varphi_e$ es 1-1.

$\therefore$ $\mathfrak{h}$ es subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Ahora consideramos:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, hook] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\
H = ? \arrow[r, hook, "?"'] & G
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.1 dice que H sí existe

De hecho:

$$H = \langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$$

subgrupo abstracto generado por $\exp(\mathfrak{h})$

Ejemplo patológico:

$\mathbb{R}_d$ con la topología discreta es grupo de Lie de $\dim = 0$.

$\mathbb{R}_d \xrightarrow{id} \mathbb{R}$ es homomorfismo analítico e inmersión

$\therefore$ $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}$ como grupos abstractos pero no como grupos de Lie