Sea G grupo topológico y G_0 la componente conexa de e.

Como $\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$ ($g \in G$ fijo)

es homeomorfismo y mapea $e \longmapsto e$, se tiene:

$$gG_0g^{-1} = G_0$$

$\therefore$ $G_0 \trianglelefteq G$.

Además, $G = \bigsqcup_{g \in S} gG_0$ para algún $S \subseteq G$.

Si G es grupo de Lie, entonces:

$$\dim G = \dim G_0$$

$\therefore$ G/G_0 es un grupo discreto.

Ejemplo:

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad G_0 = \mathbb{R}$$

$$G = \underset{\det \neq 0}{GL(n, \mathbb{R})}, \quad G_0 = \underset{\det > 0}{GL^{+}(n, \mathbb{R})}$$

Teorema 2.3:

$H \leq G$ subgrupo abstracto
G grupo de Lie
H cerrado
$\Rightarrow$ H subgrupo de Lie de G en la topología heredada.

Ejemplos:

$G = GL(n, \mathbb{R})$ grupo de Lie.

Entonces, los siguientes son subgrupos topológicos de Lie:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A J_n A^T = J_n \}$$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$SO(n) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} AA^T = I_n \\ \det(A) = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$O(p,q) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A I_{p,q} A^T = I_{p,q} \}$$

$$n = p + q, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Lie}(O(n)) = ?$

$$\mathfrak{o}(n) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \exp(tX) \in O(n) \ \forall t \in \mathbb{R} \}$$

$$X \in \mathfrak{o}(n) \iff e^{tX}(e^{tX})^T = I_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\substack{\text{der. en} \\ t=0}}{\Longrightarrow} \quad X + X^T = 0$$

$$\text{y} \quad X + X^T = 0 \implies (e^{tX})^T =$$

$$= e^{tX^T} = e^{-tX}$$

$$\therefore \quad e^{tX}(e^{tX})^T = I_n$$

$$\therefore \quad \mathfrak{o}(n) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0 \}$$

Similarmente:

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$: A $2n \times 2n$

$$AJ_n + J_n A^T = 0$$

$sl(n, \mathbb{R})$: A $n \times n$

$tr(A) = 0$

$$d(\det)_{I_n} = tr$$

pues $\det(e^{X}) = e^{tr(X)}$.

Teorema 2.6

Dem.: Se toma:

$$K = graph(\varphi)$$
$$= \{(g, \varphi(g)) \mid g \in G\}$$

y se concluye que K es subgrupo de Lie.

Sea $\pi : G \times H \longrightarrow H$ la proyección. Entonces π es analítica. Por tanto:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[dr] & G \times H \arrow[d, "\pi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

$$(g, \varphi(g)) \longmapsto \varphi(g)$$

es analítico

y no es suficiente solamente usar π.

Se prueba que:

$$\mathfrak{k} = \{(X, \psi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

para un $\psi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$.

Como:

$$(X, \psi(X)) \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\exp(tX), \exp(t\psi(X))) \in K \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y $K: (g, \varphi(g))$

se tiene:

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t\psi(X))$$

Recordamos que:

$$X \longmapsto \exp(X)$$

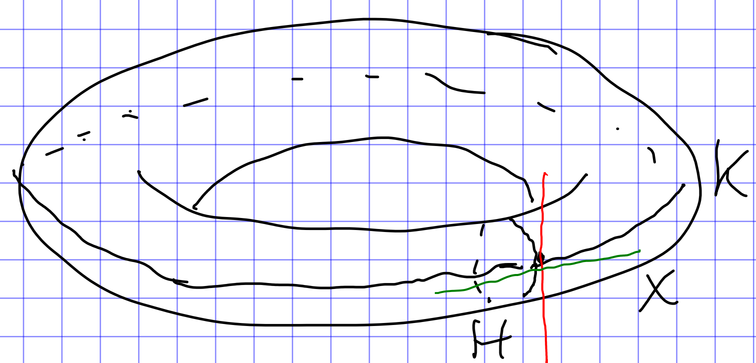
es la inversa F^{-1} de una carta F y tenemos:

$$\varphi \circ F^{-1} = \exp \circ \psi$$

ψ es lineal y entonces el lado derecho es analítico.

$\therefore$ φ es analítico.

Ejemplo en relación a la proposición 2.7.



$G = S^1 \times S^1$, $H = S^1 \times \{1\}$, $K = \{1\} \times S^1$

$\exists\ X \in \mathrm{Lie}(K) \ni \exp(mX) = 1 \in H$

$\forall m \in \mathbb{Z}$.

pero $\exp(tX) \notin H \quad \forall t \in \mathbb{R}$.