Continuando con el ejemplo 3) de la clase anterior:

$$\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{R})$$

$$a = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$\begin{array}{ccc} sl(2,\mathbb{R}) & \xrightarrow{ad} & gl(sl(2,\mathbb{R})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SL(2,\mathbb{R}) & \xrightarrow{Ad} & GL(sl(2,\mathbb{R})) \end{array}$$

Consideramos los siguientes subgrupos:

$A, B \subseteq SL(2,\mathbb{R})$ correspondientes a a, b

$A^*, B^* \subseteq GL(sl(2,\mathbb{R}))$ correspondientes a $ad_{\mathfrak{g}}(a)$, $ad_{\mathfrak{g}}(b)$.

Veremos que A^* no es compacto, y por tanto que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ no es compactamente encajada, y que B^* es compacto, y por tanto que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ es compactamente encajada.
(Observar que $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b} \cong \mathbb{R}$)

(i) B^* es compacta:

Calculamos B. Tenemos:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\therefore \exp(\mathfrak{b}) = \quad (\text{en } SL(2,\mathbb{R}))$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \\ x^2+y^2=1 \end{array} \right\}$$

que es un subgrupo de $SL(2,\mathbb{R})$ y es compacto. Por tanto:

$$B = \exp(\mathfrak{b}) \quad \text{compacto.}$$

Luego usamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \arrow[r, "ad"] \arrow[d] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \supseteq ad(\mathfrak{b}) \arrow[d] \\
B \subseteq SL(2,\mathbb{R}) \arrow[r, "Ad"] & GL(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \supseteq B^*
\end{tikzcd}$$

que nos implica:

$$B^* = Ad(B)$$

y por tanto es compacto.

$\therefore$ $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ está compactamente encajado.

(ii) A^* no es compacto.

Como en el caso anterior tenemos:

$$A^* = Ad(A)$$

(En general:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{k} \arrow[d, leftrightarrow] & \subseteq & \mathfrak{g} \arrow[d] \arrow[rr, "d\varphi"] & & \mathfrak{h} \arrow[d] & \supseteq & d\varphi(\mathfrak{k}) \arrow[d, leftrightarrow] \\ K & \subseteq & G \arrow[rr, "\varphi"] & & H & \supseteq & K_1 \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ $K_1 = d\varphi(K)$ pues:

K_1 generado por $\exp(d\varphi(\mathfrak{k}))$

K " " $\exp(\mathfrak{k})$)

Calculamos A:

$$\exp\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, x > 0 \right\} \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$$

que es no compacto.

Por otro lado:

$$\operatorname{Ker}(Ad) = Z(SL(2,\mathbb{R})) = \{\pm I_2\}$$

Luego tenemos:

$$1 \longrightarrow \{\pm I_2\} \hookrightarrow SL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{Ad} Ad(SL(2,\mathbb{R})) \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{cc} SL(2,\mathbb{R}) & Ad(SL(2,\mathbb{R})) \\ \cup\!\mid & \cup\!\mid \\ A & A^* \end{array}$$

Además $A \cap Ker(Ad) = \{I_2\}$

$\therefore \quad Ad_{SL(2,\mathbb{R})}\big|_A : A \longrightarrow A^*$

es biyectiva y por tanto isomorfismo de grupos de Lie (recordar Lemma 5.1).

$\therefore \quad A$ no compacto

$\implies A^*$ no compacto

$\implies \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ no está compactamente encajada.

(Un resultado más general:

$\varphi : G \longrightarrow H$

epimorfismo de grupos de Lie

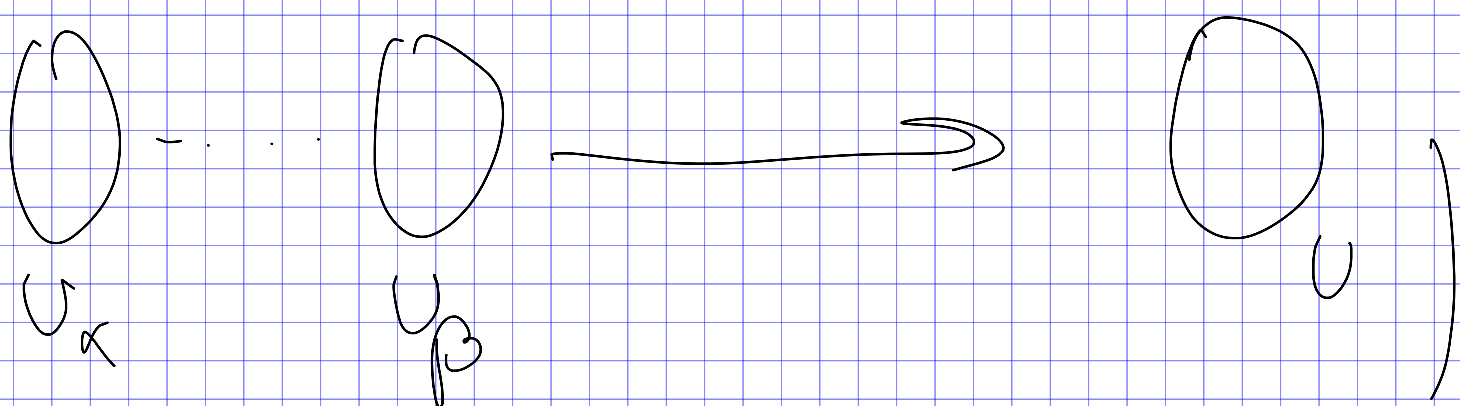
(sobre) Si $\ker(\varphi)$ es finito entonces:

$$G \text{ compacto} \iff H \text{ compacto.}$$

La razón es que φ es un mapeo recubridor con la propiedad de que I abajo es finito

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] & H \\
\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \arrow[r, leftrightarrow] & U \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

$$\varphi|_{U_\alpha} : U_\alpha \xrightarrow{\cong} U$$



Para la Proposición 5.4:

$$\begin{tikzcd} K^* \arrow[r, hook] \arrow[drr, dashed, "\varphi"'] & \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \leq & GL(\mathfrak{g}) \\ & & \tilde{K} \arrow[u, phantom, "\cup|"] \end{tikzcd}$$

K^* compacto $\iff$ $\tilde{K}$ compacto.

$\Rightarrow)$ $\tilde{K} = \varphi(K^*)$ es compacto pues φ es continuo.

$\Leftarrow)$ $\tilde{K}$ compacto $\Rightarrow$ $\tilde{K}$ cerrado en $GL(\mathfrak{g})$.

$\therefore$ $\tilde{K}$ tiene topología inducida (por Tma 2.10)

vía φ $\tilde{K} = K^*$ como conjuntos y por Corolario 2.8:

$$\tilde{K} = K^*$$

como grupos de Lie y por tanto como espacios topológicos.

$\therefore$ $\tilde{K}$ compacto $\Rightarrow$ K^* compacto.

Ejemplo: (¿porqué usamos Ad para encajes compactos?)

$SL(2,\mathbb{R})$ ✓ $\qquad \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) = ?$

(rec. universal)

Afirmación:

$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times P_1(2,\mathbb{R})$ homeomorfos

$\widetilde{SL}(n,\mathbb{R}) \cong \widetilde{SO}(n) \times P_1(n,\mathbb{R})$

donde:

$$P_1(n,\mathbb{R}) = \left\{ X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} X^T = X \\ X > 0 \\ \det(X) = 1 \end{array} \right\}$$

Dem.:

Probamos que:

$$SL(n,\mathbb{R}) \cong SO(n) \times P_1(n,\mathbb{R})$$

pues $\forall A \in SL(n,\mathbb{R})\ \exists !\ O \in SO(n)$, $P \in P_1(n,\mathbb{R})$ tales que:

$$A = OP$$

lo cual se halla de:

$$A^T = P^T O^T = P^T O^{-1} = P O^{-1}$$

$$\therefore \quad A^T A = P O^{-1} O P = P^2$$

y basta tomar:

$$P = (A^T A)^{\frac{1}{2}}, \quad O = A P^{-1}$$

Luego se ve que $P_1(n, \mathbb{R})$ es simplemente conexo.

$$\therefore \quad \widetilde{SL}(n, \mathbb{R}) \cong \widetilde{SO}(n) \times P_1(n, \mathbb{R}) \quad //$$

Con $n = 2$:

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \cong \widetilde{SO}(2) \times P_1(2, \mathbb{R})$$
$$\cong \widetilde{S^1} \times P_1(2, \mathbb{R})$$
$$\cong \mathbb{R} \times P_1(2, \mathbb{R})$$

Además tenemos un diagrama de grupos:

$$
\begin{tikzcd}
 & \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \arrow[d] & \\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \arrow[ur] \arrow[r] & SL(2,\mathbb{R}) \supseteq \widetilde{SO}(2) &
\end{tikzcd}
$$

$\longleftarrow$ no compacto.

compacto

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \supseteq \mathfrak{so}(2) \cong \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathfrak{b}$$

$$SO(2) = B \longrightarrow B^{*}$$

Observamos que:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \arrow[d] \arrow[dr, "Ad_{\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})}"] & \\
SL(2,\mathbb{R}) \arrow[r, "Ad_{SL(2,\mathbb{R})}"'] & GL(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.