Para la primera parte de §6 en la página 131 necesitamos el siguiente resultado de álgebra lineal.

Prop.: Sea $V$ un espacio vectorial de $\dim < +\infty$ sobre $F$ ($F = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), con una forma bilineal simétrica $\langle , \rangle$. Si $W \leq V$ es un subespacio, entonces:

$$\dim W + \dim W^\perp = \\ = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dem.:

Primero suponemos $\langle , \rangle$ no degenerada.

Sea $v_1, \dots, v_n$ base de $V$ tal que $v_1, \dots, v_k$ es base de $W$. Sea $A = (a_{rs})_{r,s=1}^n$ la representación matricial de $\langle , \rangle$:

$$a_{rs} = \langle v_r, v_s \rangle.$$

Si $u = \sum_{s=1}^{n} c_s v_s \in V$ entonces:

$$u \in W^{\perp} \iff \langle u, v_r \rangle = 0 \quad \forall r = 1, \dots, k$$

$$\iff \sum_{s=1}^{n} a_{rs} c_s = 0 \quad \forall r = 1, \dots, k$$

$$\iff \tilde{A} \tilde{c} = 0$$

donde $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$

$$\tilde{A} = (a_{rs})_{r=1, s=1}^{k \quad n}$$

Como $\langle , \rangle$ es no degenerado entonces $A$ es no singular y por tanto $\tilde{A}$ tiene rango $k$. Se concluye que:

$$\tilde{A} \tilde{c} = 0$$

tiene espacio solución de dimensión:

$$n - k = \dim V - \dim W$$

Por tanto:

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W.$$

Supongamos ahora que $\langle\, ,\, \rangle$ no es necesariamente no degenerada.

Sea $V^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, V \rangle = 0 \}$.

Consideramos el cociente:

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\ \varphi\ } V/V^{\perp} \\ v &\longmapsto v + V^{\perp} \end{aligned}$$

Observamos que:

$$\langle\, ,\, \rangle_0 : V/V^{\perp} \times V/V^{\perp} \longrightarrow F$$

$$\langle u + V^{\perp}, v + V^{\perp} \rangle_0 = \langle u, v \rangle$$

es una forma bilineal bien definida. Más aún, es fácil ver que $\langle\, ,\, \rangle_0$ es no degenerada.

Por el caso anterior:

$$\dim V/_{V^\perp} = \dim \varphi(W) + \dim \varphi(W)^\perp$$

Tenemos:

$$\dim V/_{V^\perp} = \dim V - \dim V^\perp.$$

Además:

$$\varphi|_W : W \longrightarrow \varphi(W)$$

es sobre con kernel $W \cap V^\perp$ y por tanto:

$$\dim \varphi(W) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$$

Calculamos $\varphi(W)^\perp$. Sea $v + V^\perp \in V/_{V^\perp}$. Entonces:

$$v + V^\perp \in \varphi(W)^\perp$$

$$\iff \langle v + V^\perp, w + V^\perp \rangle_0 = 0 \quad \forall w \in W$$

$$\iff \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W.$$

$$\iff v \in W^\perp$$

Luego $\varphi(W)^\perp = \varphi(W^\perp)$, y entonces:

$$\varphi|_{W^\perp} : W^\perp \longrightarrow \varphi(W^\perp)$$

es sobre con kernel $W^\perp \cap V^\perp$. Pero $V^\perp \subseteq W^\perp$ (fácil de ver) y entonces el kernel es $V^\perp$! Se concluye que:

$$\dim \varphi(W)^\perp = \dim W^\perp - \dim V^\perp.$$

Juntando todas las igualdades:

$$\dim V - \dim V^\perp =$$
$$= \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$$
$$+ \dim W^\perp - \dim V^\perp$$

$$\therefore \ \dim V + \dim(W \cap V^\perp) =$$
$$= \dim W + \dim W^\perp \quad //$$

En la página 131:

$\sigma \in Aut(\mathfrak{g})$

$\therefore \sigma([X, Y]) = [\sigma X, \sigma Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$

$\sigma \circ ad(X) = ad(\sigma X) \circ \sigma$

$\therefore \sigma \circ ad(X) \circ \sigma^{-1} = ad(\sigma X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$

Luego:

$$B(\sigma(X), \sigma(Y)) =$$
$$= tr(ad(\sigma(X)) ad(\sigma(Y)))$$
$$= tr(\sigma\, ad(X) \sigma^{-1} \sigma\, ad(Y) \sigma^{-1})$$
$$= tr(ad(X) ad(Y))$$
$$= B(X, Y)$$

En símbolos:

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq O(\mathfrak{g}, B) \subseteq GL(\mathfrak{g})$$

En particular, $\forall\, g \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$:

$$B(gX, gY) = B(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

pues $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Recordamos que:

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$$

y por tanto $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es generado por:

$$\{ e^{\mathrm{ad}(X)} \mid X \in \mathfrak{g} \}$$

Entonces $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$B(e^{t\,\mathrm{ad}(X)} Y, e^{t\,\mathrm{ad}(X)} Z) = B(Y, Z) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

derivando en $t=0$:

$$B(ad(X)(Y), Z) + B(Y, ad(X)(Z)) = 0$$

$$\therefore \quad B([X,Y], Z) = -B(Y, [X,Z]) \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$$

En particular, $ad(X)$ es $B$-antisimétrico.

---

Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{a} \longrightarrow B_{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{g} \longrightarrow B_{\mathfrak{g}}$$

$X, Y \in \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$

$$B_{\mathfrak{a}}(X,Y) = tr(ad_{\mathfrak{a}}(X)\, ad_{\mathfrak{a}}(Y))$$

$$B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = tr(ad_{\mathfrak{g}}(X)\, ad_{\mathfrak{g}}(Y))$$

$\forall Z \in \mathfrak{a}$:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X)(Z) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Z)$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}$ subespacio), entonces:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X) & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{array} \end{array}$$

pues $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{b}$

$\forall X \in \mathfrak{a}$

pues $\mathfrak{a}$ es subálgebra

$$[X, \mathfrak{b}] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{a}$$
$$[X, \mathfrak{g}] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$$

$\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{b}$

$$\therefore \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{a}$, y tomando traza:

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = B_{\mathfrak{a}}(X, Y)$$

Ejemplo:

$sl(2,F)$ $\quad (F = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$

es semisimple.

$$\mathcal{B} = ?$$

$\dim sl(2,F) = 3$ con base:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

respecto de la cual:

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to [X,X] = 0$

$\to [X,Y] = H$

$\to [X,H] = -2X$

$$ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se usó que:

$$[X,Y] = H, \quad [H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y$$

B respecto de la base X, Y, H tiene matriz:

$$B: \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} X & Y & H \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X \\ Y \\ H \end{array} \end{array}$$

no degenerada y diagonizable a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$