Medida de Haar.

Sea G un grupo topológico. Una medida de Haar en G es una medida de Radon μ en los conjuntos de Borel que satisface las dos siguientes condiciones equivalentes:

1) $\mu(gA) = \mu(A)$ $\forall g \in G$, $\forall A \subseteq G$ de Borel.

2) $$\int_G f(gx)\, d\mu(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x)$$

$\forall f \in L^1(G,\mu)$, $g \in G$.

Teorema:
Si G es un grupo topológico localmente compacto, entonces existe una medida de Haar μ en G. Cualquier otra medida de Haar es de la forma $c\mu$ para algún $c > 0$.

Ejemplos:

1) En $\mathbb{R}^n$ la medida de Lebesgue es una medida de Haar.

2) Una medida de Haar de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ es:

$$d\mu(x) = \frac{dx}{x}$$

3) Una medida de Haar en $GL(n, \mathbb{R})$ es:

$$d\mu(A) = \frac{dA}{|\det(A)|^n}$$

donde dA denota la medida de Lebesgue en $GL(n, \mathbb{R})$.

Demostración de la existencia para grupos de Lie.

Sea G grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Sea $\omega_e : \underbrace{\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}}_{n \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad n = \dim \mathfrak{g}$

una forma bilineal anti-simétrica tal que si $X_1, \dots, X_n$ es base de $\mathfrak{g}$, entonces:

$$\omega_e(X_1, \dots, X_n) \neq 0.$$

(por ejemplo, tomar un iso-morfismo $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ y usar det en $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$)

Sea ω la n-forma en G dada por:

$$\omega_g(v_1, \dots, v_n) = \omega_e(dL_{g^{-1}}(v_1), \dots, dL_{g^{-1}}(v_n))$$

$\forall g \in G$, $v_1, \dots, v_n \in T_g G$.
Es fácil ver que ω es una n-forma G-invariante por la izquierda.

Definimos el funcional positivo:

$$\begin{aligned} C_c(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_G f\omega \end{aligned}$$

(Ver Spivak, o Warner para la definición de la integral de n-formas sobre n-variedades).

Entonces $\exists!$ medida de Radon μ en G tal que:

$$\int_G f \, d\mu = \int_G f \omega$$

$\forall f \in C_c(G)$.

La invarianza de G da la invarianza deseada para μ.

Corolario:
Si G es compacto, entonces toda medida de Haar es finita y satisface:

$$*) \int_G f(xg) \, d\mu(x) = \int_G f(x) \, d\mu(x)$$

$\forall f \in L^1(G, \mu)$, $g \in G$.

Dem.:

La primera afirmación es obvia pues toda medida de Radon es finita en compactos.

Supongamos que μ es de Haar y normalizemos de modo que $\mu(G)=1$.

Sea ν la medida de Radon dada por:

$$\nu(A)=\mu(A^{-1})$$

$(A^{-1}=\{g^{-1} \mid g\in A\} \quad \forall A\subseteq G$ Borel$)$

Entonces:

$$\nu(Ag)=\mu((Ag)^{-1})=\mu(g^{-1}A^{-1})= \\ =\mu(A^{-1})=\nu(A)$$

$$\int_G f(xg)\,d\nu(x)=\int_G f((xg)^{-1})\,d\mu(x)$$

$$= \int_G f(g^{-1}x^{-1})\, d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})\, d\mu(x)$$

$$= \int_G f(x)\, d\nu(x).$$

Es decir, ν es G-invariante por la derecha.
Además $\nu(G) = 1$.

Luego $\forall f \in C(G)$:

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_G \int_G f(x)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \int_G \int_G f(yx)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \int_G \int_G f(yx)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$$

$$= \int_G \int_G f(y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$$

$$= \int_G f(y)\, d\nu(y)$$

$$\therefore \quad \mu = \nu \quad //$$

Proposición 6.6, página 133, algunos detalles:

Sea $H \leq GL(V)$ compacto $\dim V < +\infty$.

Sea $\langle , \rangle_0$ cualquier producto interno en V.

Definimos: $u, v \in V$.

$$\langle u, v \rangle = \int_H \langle hu, hv \rangle_0 \, d\mu(h)$$

μ medida de Haar de H

$\therefore$ $\langle\, , \rangle$ es producto interno en V.

Si $\langle u, u\rangle = 0$

$$\Rightarrow \int_H \langle hu, hu\rangle_0 \, d\mu(h) = 0$$

$$\Rightarrow \langle hu, hu\rangle_0 = 0 \quad \forall h \in H$$

$$\Rightarrow hu = 0 \quad \forall h \in H$$

$$\Rightarrow u = 0$$

Además: $\forall h_0 \in H$

$$\langle h_0 u, h_0 v\rangle = \int_H \langle h h_0 u, h h_0 v\rangle_0 \, d\mu(h)$$

$$\left(f(h) = \langle hu, hv\rangle_0 \right)$$

$$= \int_H \langle hu, hv\rangle_0 \, d\mu(h) = \langle u, v\rangle.$$

En la demostración:

$$B(X,X) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_{ij}(X) = 0 \quad \forall i,j$$

$$\Longleftrightarrow \quad ad(X) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad X \in \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Completando (i) decimos.

Si $\mathfrak{g}$ semisimple, entonces

$$\mathfrak{z} = 0$$

y por tanto:

$$B(X,X) = 0 \Longrightarrow X = 0$$

$\therefore$ B es estrictamente definida negativa.

Completamos (ii) como sigue.

Tenemos:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}', \quad \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}^{\perp}$$

Hemos visto que:

$$B(X,X) = 0 \Rightarrow X \in \mathfrak{z}$$

$$\therefore \quad B(X,X) = B_{\mathfrak{g}'}(X,X) = 0$$

con $X \in \mathfrak{g}' \Rightarrow X = 0$

Luego $B_{\mathfrak{g}'}$ es estrictamente definida negativa y en particular no degenerada.

$\therefore$ $\mathfrak{g}'$ es semisimple.

Escribimos:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}' = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\ell$$

con $\mathfrak{g}_j \trianglelefteq \mathfrak{g}'$ ideales simples.

Como $[\mathfrak{z}, \mathfrak{g}_j] = 0 \subseteq \mathfrak{g}_j$, entonces $\mathfrak{g}_j \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Como $\mathfrak{g}'$ es compacta, entonces $\mathfrak{g}_j$ son compactas. (por (ii))

Además:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\ell, \mathfrak{z} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\ell]$$

$$= [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} [\mathfrak{z}, \mathfrak{g}_j]}_{=0} + \sum_{i,j=1}^{\ell} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$$

pero

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mathfrak{g}_i & i = j \end{cases}$$

$$\therefore [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\ell = \mathfrak{g}' \quad //$$

Demostración Corolario 6.7:

Sea $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, G compacto. Entonces:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \supseteq \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "e"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & GL(\mathfrak{g}) \supseteq \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Y se usa que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ad}(G)$

$\therefore$ G compacto $\Rightarrow$ $\mathrm{Ad}(G)$ compacto $\Rightarrow$ $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ compacto. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ compacta.

Si $\mathfrak{g}$ es compacta, entonces:

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \underbrace{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}_{\text{compacta semisimple}}$$

$\therefore\ \mathfrak{g} \cong (\mathbb{R}^n, [\ ,\ ] \equiv 0) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

Sea:

$$G = (S^1)^n \times \mathrm{Int}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$$

que es compacto.

Pero:

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(G) &= \mathrm{Lie}((S^1)^n) \oplus \mathrm{Lie}(\mathrm{Int}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])) \\ &= (\mathbb{R}^n, [\ ,\ ] \equiv 0) \\ &\quad \oplus \mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \\ &\cong \mathbb{R}^n \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cong \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Para la prop. 6.8:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{k} \le \mathfrak{g} \arrow[r, "ad_{\mathfrak{k}}"] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \ge ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \arrow[d, "e"] \arrow[d, leftrightarrow, shift left=8] \\ & GL(\mathfrak{g}) \ge K \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{k} \le \mathfrak{g}$ compactamente encajada $\overset{def}{\Longrightarrow}$ K compacto.

Por probar ($\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = 0$) que:

$$B_{\mathfrak{g}}\big|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es estrictamente definida negativa.

Teorema 6.9 (página 133)

G conexo compacto semisimple

$\Rightarrow \tilde{G}$ (recubrimiento universal) es compacto.

Obs.:

S^1 es conexo compacto

y $\tilde{S}^1 = \mathbb{R}$ no es compacto.

G conexo compacto,

$Lie(\tilde{G}) = Lie(G) = \mathbb{R}^n \oplus h$

h compacta semisimple.

Se puede probar que:

$\tilde{G} \cong \mathbb{R}^n \times \tilde{H}$ con $Lie(\tilde{H}) = h$

$\mathbb{R}^n$: grupo aditivo

$\tilde{H}$ simplemente conexo

Si $n=0$, el Teorema dice que

$\tilde{G} = \tilde{A}$ es compacto.

En particular:

G conexo compacto simple

$\Longrightarrow$ $\tilde{G}$ compacto.