Grupos de Lie 2021
Primer parcial
Soluciones.

Problema 1:
Considere el subgrupo $\mathbb{Q}$ de números racionales del grupo de Lie $\mathbb{R}$ de todos los números reales. Probar que $\mathbb{Q}$ admite una estructura de grupo de Lie para la cual es un subgrupo de Lie de $\mathbb{R}$.

Solución:

Dotamos a $\mathbb{Q}$ de la topología discreta. Entonces, $\forall x \in \mathbb{Q}$ el mapeo

$$\begin{aligned} \{x\} &\longrightarrow \mathbb{R}^0 \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Más aún, los cambios de coordena_ das entre tales homeomorfismos son todos dados por el mapeo identidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^0 &\longrightarrow \mathbb{R}^0 \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

el cual es C^∞.

Por tanto $\mathbb{Q}$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión 0. Usando las cartas anteriores es claro que el mapeo:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

se traduce localmente en cartas a:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0 &\longrightarrow \mathbb{R}^0 \\ (0, 0) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

el cual es suave. Por tanto, $\mathbb{Q}$ es grupo de Lie con la estructura descrita.

Con tal estructura, el mapeo inclusión:

$$\iota : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

corresponde en cartas a la inclusión:

$$\mathbb{R}^0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

y por tanto ι es un homomomorfismo de grupo suave con diferencial inyectiva.

Se concluye así que $\mathbb{Q}$ es subgrupo de Lie de $\mathbb{R}$ con la estructura descrita para $\mathbb{Q}$.

Problema 2:
Escribir la definición de grupo de Lie y probar que los siguientes conjuntos definen grupos de Lie con la topología heredada del correspondiente grupo de matrices.

$$U(p,q) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* I_{p,q} A = I_{p,q}\}$$

$$Sp(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C}) \mid A^T J_n A = J_n\}$$

donde $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

En ambos casos, por los resultados vistos en clase, basta ver que cada conjunto es un subgrupo cerrado en el conjunto de matrices invertibles correspondientes.

$\underline{U(p,q):}$

$$A \in U(p,q) \implies A^* I_{p,q} A = I_{p,q}$$

$$\implies \det(A^*)(-1)^q \det(A) = (-1)^q$$

$$\implies |\det(A)|^2 = 1$$

Por tanto, $U(p,q) \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ para $n = p+q$.

Claramente:

$$I_n^* I_{p,q} I_n = I_{p,q}$$

$\therefore \quad I_n \in U(p,q)$.

Además, si $A, B \in U(p,q)$ entonces:

$$(AB^{-1})^* I_{p,q} (AB^{-1}) =$$

$$= (B^{-1})^* A^* I_{p,q} A B^{-1}$$

$$= (B^{-1})^* I_{p,q} B^{-1}$$

$$= (B^*)^{-1} I_{p,q} B^{-1} = I_{p,q}$$

pues $B^* I_{p,q} B = I_{p,q}$, de lo cual se concluye $AB^{-1} \in U(p,q)$. Luego $U(p,q)$ es subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$

Además:

$$U(p,q) = F^{-1}(I_{p,q})$$

donde $F: GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ es la función continua dada por:

$$F(A) = A^* I_{p,q} A.$$

Por tanto, $U(p,q)$ es cerrado en $GL(n,\mathbb{C})$.

<u>$Sp(n,\mathbb{C})$:</u>

$$A \in Sp(n,\mathbb{C}) \implies A^T J_n A = J_n$$
$$\implies \det(A^T) 1 \det(A) = 1$$
$$\implies \det(A)^2 = 1.$$

Por tanto:

$$Sp(n,\mathbb{C}) \subseteq GL(2n,\mathbb{C}).$$

Claramente:

$$I_{2n}^T J_n I_{2n} = J_n$$

$\therefore \quad I_{2n} \in Sp(n, \mathbb{C})$.

Además, $\forall A, B \in Sp(n, \mathbb{C})$:

$$(AB^{-1})^T J_n (AB^{-1}) =$$

$$= (B^T)^{-1} A^T J_n A B^{-1}$$

$$= (B^T)^{-1} J_n B^{-1} = J_n$$

ya que $B^T J_n B = J_n$. Se concluye que $Sp(n, \mathbb{C})$ es subgrupo de $GL(2n, \mathbb{C})$.

Además:

$$Sp(n, \mathbb{C}) = F^{-1}(J_n)$$

donde $F: GL(2n, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(2n, \mathbb{C})$ es la función continua dada por:

$$F(A) = A^T J_n A$$

Por tanto, $Sp(n, \mathbb{C})$ es cerrado en $GL(2n, \mathbb{C})$.

Como demostración alternativa se puede considerar las funciones

$$F : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \longrightarrow Her_n(\mathbb{C})$$
$$A \longmapsto A^* I_{p,q} A$$

$$G : M_{2n\times 2n}(\mathbb{C}) \longrightarrow ASym_{2n}(\mathbb{C})$$
$$A \longmapsto A^T J_n A$$

Donde:

$Her_n(\mathbb{C})$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \ni A^* = A$

$ASym_{2n}(\mathbb{C})$: $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C}) \ni A^T = -A$

Luego probar que F, G son suaves y que:

$I_{p,q}$ es valor regular de F

J_n es valor regular de G

Esto permite concluir que

$U(p,q)$, $Sp(n,\mathbb{C})$ son subvariedades encajadas de $GL(n,\mathbb{C})$ y $GL(2n,\mathbb{C})$, resp.

Resta ver, con los argumentos de arriba, que $U(p,q)$, $Sp(n,\mathbb{C})$ son subgrupos.

Finalmente, la operación $(A,B) \longmapsto AB^{-1}$ se factoriza:

$$\begin{tikzcd}
GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C}) \arrow[rr] & & GL(n,\mathbb{C}) \\
U(p,q) \times U(p,q) \arrow[u, hook] \arrow[urr] \arrow[rr] & & U(p,q) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

a la flecha roja suavemente porque $U(p,q)$ es subvariedad encajada.

Un argumento similar se aplica para $Sp(n,\mathbb{C})$.

problema 3:
Calcular las álgebras de Lie de los grupos del problema anterior. Usar esto para calcular las dimensiones sobre $\mathbb{R}$ de tales grupos.

Solución:

Para cualquier grupo de Lie H que es 2do numerable y subgrupo de Lie de un grupo general lineal $GL(N,\mathbb{C})$, el álgebra de Lie es:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in H \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

<u>$U(p,q)$:</u>

$$X \in \mathfrak{u}(p,q) \Leftrightarrow (e^{tX})^* I_{p,q} e^{tX} = I_{p,q} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{tX^*} I_{p,q} e^{tX} = I_{p,q} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando en t:

$$\Rightarrow X^* I_{p,q} = - I_{p,q} X$$

$$\iff X^* = -I_{p,q} X I_{p,q}$$

por unicidad de subgrupos uniparamétricos:

$$\iff e^{tX^*} = e^{-tI_{p,q} X I_{p,q}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

por propiedades de la exponencial:

$$\iff e^{tX^*} = I_{p,q} e^{-tX} I_{p,q}$$

$$\iff e^{tX^*} I_{p,q} e^{tX} = I_{p,q}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}.$$

Se concluye que:

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* I_{p,q} = -I_{p,q} X \}$$

Observamos que

$$i I_n \in \mathfrak{u}(p,q) \quad , \quad I_n \notin \mathfrak{u}(p,q)$$

$\therefore$ $\mathfrak{u}(p,q)$ es espacio real no complejo.

Si escribimos por bloques

$$X = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

con los tamaños indicados, entonces:

$$X^{*} I_{p,q} = \begin{pmatrix} A^{*} & -C^{*} \\ B^{*} & -D^{*} \end{pmatrix}$$

$$-I_{p,q} X = \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Por tanto $X \in \mathcal{U}(p,q)$ si y sólo si:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{*} & C \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A \in \mathcal{U}(p),\ B \in \mathcal{U}(q) \\ B \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \end{array}$$

Sabemos que:

$$GL(p,\mathbb{C}) = \mathcal{U}(p) \oplus i\,\mathcal{U}(p)$$

$$-i \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}(p) = \dim_{\mathbb{C}} GL(p,\mathbb{C})$$
$$= p^2$$

Concluimos que:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}(p,q) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}(p) + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}(q) + \dim_{\mathbb{R}} M_{p\times q}(\mathbb{C})$$

$$= p^2 + q^2 + 2pq$$

$$= (p+q)^2 = n^2$$

<u>$Sp(n, \mathbb{C})$:</u>

$X \in sp(n, \mathbb{C})$

$$\Longleftrightarrow (e^{tX})^T J_n e^{tX} = J_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow e^{tX^T} J_n e^{tX} = J_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando:

$$\Longrightarrow X^T J_n = -J_n X$$

$$\Longleftrightarrow X^T = -J_n X J_n^{-1}$$

por unicidad de subgrupos uniparamétricos:

$$\iff e^{tX^T} = e^{-tJ_nXJ_n^{-1}} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\iff e^{tX^T} = J_n e^{-tX} J_n^{-1} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\iff (e^{tX})^T J_n e^{tX} = J_n \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Luego:

$$sp(n,\mathbb{C}) = \{X\in gl(2n,\mathbb{C}) \mid X^T J_n = -J_n X\}$$

Escribimos $X\in gl(2n,\mathbb{C})$ en bloques:

$$X = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n & n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \end{array}$$

Luego:

$$X^T J_n = \begin{pmatrix} C^T & -A^T \\ D^T & -B^T \end{pmatrix}$$

$$-J_n X = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X\in sp(n,\mathbb{C})$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \quad B, C \text{ simétricas, } A\ n \times n.$$

En particular, $sp(n, \mathbb{C})$ es un álgebra de Lie compleja.

Concluimos que ($Sym_n(\mathbb{C}) = \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \mid A^T = A\}$):

$$\dim_{\mathbb{R}} sp(n, \mathbb{C}) =$$

$$= 2 \dim_{\mathbb{C}} sp(n, \mathbb{C})$$

$$= 2 \left(2 \dim Sym_n(\mathbb{C}) + n^2 \right)$$

$$= 2 \left(2 \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \right)$$

$$= 2 (n^2 + n + n^2)$$

$$= 2n(2n+1).$$

También concluimos:

$$\dim U(p,q) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(p,q) = (p+q)^2$$

$$\dim Sp(n, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} sp(n, \mathbb{C}) = 2n(2n+1).$$

Problema 4:
Denote por $P(n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices definidas positivas $n \times n$ reales. Considere la acción del grupo $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $P(n, \mathbb{R})$ dada por:

$$A \cdot P = APA^T$$

$A \in GL(n, \mathbb{R})$ y $P \in P(n, \mathbb{R})$. Probar que $P(n, \mathbb{R})$ admite un única estructura de variedad analítica tal que la acción anterior es suave.

Solución:

Por álgebra lineal

$$P \in P(n, \mathbb{R}) \implies APA^T \in P(n, \mathbb{R})$$

$\forall A \in GL(n, \mathbb{R})$ y también $\forall P \in P(n, \mathbb{R})$ $\exists A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que:

$$P = AA^T = AI_nA^T$$

Por lo anterior, el grupo de Lie $GL(n,\mathbb{R})$ actúa transitivamente sobre el conjunto $P(n,\mathbb{R})$. Probar que hay efectivamente una acción es fácil pero necesario probar.

Por otro lado:

$$A I_n A^T = I_n \iff A \in O(n)$$

Se concluye que el mapeo:

$$GL(n,\mathbb{R})/O(n) \xrightarrow{\varphi} P(n,\mathbb{R})$$

$$A\,O(n) \longmapsto AA^T$$

es una biyección de conjuntos.

Como $O(n)$ es subgrupo cerrado de $GL(n,\mathbb{R})$, por los teoremas vistos en clase, $\exists !$ estructura de variedad analítica en

$$GL(n,\mathbb{R})/O(n)$$

tal que la acción:

$$GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R})/O(n) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})/O(n)$$

$$A \cdot (BO(n)) = (AB)\,O(n)$$

es analítica. Por otro lado:

$$\varphi(A \cdot (BO(n))) =$$

$$= \varphi(ABO(n)) = (AB)(AB)^T$$

$$= A(BB^T)A^T = A\varphi(BO(n))A^T$$

y por tanto φ es $O(n)$-equivariante.

Por tanto, φ induce en $P(n,\mathbb{R})$ una estructura de variedad analítica tal que la acción de $GL(n,\mathbb{R})$ es suave.

Básicamente, se declara a φ como difeomorfis_ mo:

Si $U_\alpha \subseteq GL(n,\mathbb{R})/O(n)$ es abierto con carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^N$, entonces $\varphi(U_\alpha)$ se declara como abierto y se le dota de la carta

$$\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\alpha) \longrightarrow V_\alpha .$$

Es fácil checar que esto define una variedad.

Por otro lado, es fácil ver que $P(n,\mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de $Sym_n(\mathbb{R})$, y por tanto variedad analítica. Como las operaciones de matrices son analíticas la acción dada:

$$GL(n,\mathbb{R}) \times P(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$
$$A \cdot P = A P A^T$$

es suave. Por la unicidad establecida arriba, esta estructura de variedad en $P(n, \mathbb{R})$ y la dada por φ son la misma.