Sea X un conjunto y:

$$\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

una premedida con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra. Denotemos por:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})$$

la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Por simplicidad, y cubriendo los casos de mayor interes, supondremos que μ_0 es σ-finita.

Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ la medida exterior obtenida a partir de μ_0. Sea $\mathcal{M}^*$ la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles. Por el Teorema 1.11 (todas las referencias son al libro de Folland):

$$(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$$

es un espacio de medida completo.

Por el Teorema 1.14, la

medida $\mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ es la única medida en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ que extiende a μ_0. Además, por la Proposición 1.13 b):

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}^*.$$

Entonces tenemos dos espacios de medida:

$(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$ completo

$(X, \mathcal{M}(\mathcal{A}), \mu = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})})$ no necesariamente completo.

Podemos entonces completar μ usando el Teorema 1.9 para obtener:

$(X, \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}, \overline{\mu})$ completo.

Hemos llegado, a partir de μ_0, a dos medidas completas

$\overline{\mu}$ en $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ y μ^* en $\mathcal{M}^*$

Queremos probar que ambas son la misma:

Teorema A:

Con la notación anterior, si μ_0 es σ-finita, entonces:

1) $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})} = \mathcal{M}^*$

2) $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})} = \mathcal{M}^*$

Demostración:

En primer lugar, por la discusión anterior:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}, \mathcal{M}^*$$

$$y \quad \bar{\mu}(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}(A).$$

*) $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{M}^*$, $\bar{\mu}|_{\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}} = \mu^*|_{\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}}$:

Sea $A \in \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$. Por definición (ver Teorema 1.9)

$\exists$ $E, N \in \mathcal{M}(A)$, $F \subseteq N$ tales que:

$$A = E \cup F \,, \mu(N) = 0$$

Como $\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}^*$ y en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ μ y μ^* coinciden:

$$0 = \mu(N) = \mu^*(N)$$

La completitud de $\mathcal{M}^*$ implica que $F \in \mathcal{M}^*$ y por tanto:

$$A = E \cup F \in \mathcal{M}^*.$$

Hemos probado que:

$$\overline{\mathcal{M}(A)} \subseteq \mathcal{M}^*$$

Además, tenemos:

$$\overline{\mu}(A) = \mu(E) \quad (\text{def. de } \overline{\mu})$$

$$= \mu^*(E) \quad (\mu^* \text{ extiende a } \mu)$$

$$= \mu^*(E) + \mu^*(F \setminus E)$$

$$(\mu^*(F) = 0)$$

$$= \mu^*(E \cup (F \setminus E))$$

$$= \mu^*(E \cup F) = \mu^*(A)$$

**) $\mathcal{M}^* \subseteq \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$:

Esta afirmación y *) implican que:

$$\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})} = \mathcal{M}^*$$

$$\bar{\mu}(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \overline{\mathcal{M}(A)} = \mathcal{M}^*$$

lo cual completa el Teorema A.

Por tanto, basta probar **). Para lograr esto daremos una solución al ejercicio 18 en la página 32.

Como sabemos, tenemos una premedida σ-finita

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

Denotamos:

$$A_\sigma = \left\{ A \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{l} A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \\ A_j \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

$$A_{\sigma\delta} = \left\{ A \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{l} A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \\ A_k \in \mathcal{A}_\sigma \end{array} \right\}$$

Afirmación 1: (Problema 18 a))

Si $E \subseteq X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathcal{A}_\sigma$ con $E \subseteq A \ni \mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

Sol.: Por definición

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_0(A_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} E \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \\ A_j \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

Luego, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$, $A_j \in \mathcal{A} \ni$:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

Pero μ^* extiende a μ_0 y por tanto:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Afirmación 2 (Problema 18 b)):

Sea $E \subseteq X$ con $\mu^*(E) < +\infty$. Entonces

$E \in \mathcal{M}^* \iff \exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ con

$E \subseteq B$ y $\mu^*(B \setminus E) = 0.$

$\Leftarrow)$: Si tal B existe, entonces $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}^*$. Por tanto B es μ^*-medible. Como μ^* es completa, entonces $B \setminus E$ también es μ^*-medible. Luego escribimos:

$$E = B \setminus (B \setminus E)$$

que pertenece a $\mathcal{M}^*$ porque es σ-álgebra.

$\Rightarrow)$: Por la afirmación 1) $\forall k \ \exists A_k \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que:

$$\mu^*(A_k) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k}$$

$$E \subseteq A_k$$

Reemplazando A_k por $\bigcap_{j=1}^{k} A_j$ podemos suponer que $\{A_k\}_k$ es decreciente. Más aún $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k} < +\infty$ $\forall k$.

Sea $B = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{U}_{\sigma\delta}$. Entonces por la continuidad por arriba y ya que $E \subseteq B$:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(B) = \lim_{k\to+\infty} \mu^*(A_k)$$

$$\leq \mu^*(E) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = \mu^*(E)$$

$$\therefore \quad \mu^*(B) = \mu^*(E) < +\infty$$

Se sigue entonces que:

$$\mu^*(B \setminus E) = \mu^*(B) - \mu^*(E) = 0$$

Esto prueba la afirmación. (Hasta aquí, no hemos usado que μ_0 sea σ-finita). //

Afirmación 3) (Problema 18 c)):

Si $E \subseteq X$, entonces:

$$E \in \mathcal{U}^* \iff \exists\, B \in \mathcal{U}_{\sigma\delta} \ni E \subseteq B$$

$$\mu^*(B \setminus E) = 0.$$

$\Leftarrow$): La misma demostración de arriba sigue siendo válida.

$\Rightarrow$): Como μ_0 es σ-finita:

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$$

$A_j \in \mathcal{A}$, $\mu_0(A_j) < +\infty$. Reemplazando A_j por $A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)$ $(A_0 = \emptyset)$ podemos suponer que la unión es disjunta.

Sea $E \subseteq X$ μ^*-medible. Escribimos:

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \quad , \quad E_j = E \cap A_j$$

que es unión disjunta.

Además, E_j es μ^*-medible y $\mu^*(E_j) < +\infty$. Por la afirmación 2):

$\exists$ $B_j \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E_j \subseteq B_j$

$$\mu^*(B_j \setminus E_j) = 0.$$

En particular, $\exists\, A^j_{kl} \in \mathcal{A} \ni$:

$$B_j = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A^j_{kl}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} E_j = E_j \cap A_j \subseteq B_j \cap A_j &= A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A^j_{kl} \right) \\ &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(A_j \cap \left(\bigcup_{l=1}^{+\infty} A^j_{kl} \right) \right) \\ &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} \left(A_j \cap A^j_{kl} \right) \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando por conjuntos más pequeños podemos suponer que:

$$B = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j \quad \text{es disjunta}$$

con $E_j \subseteq B_j \subseteq A_j$.

$A^j_{kl} \subseteq A_j \quad \forall\, k, l$

A_j disjuntos a pares.

De estas propiedades concluimos que:

$$B \setminus E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (B_j \setminus E_j)$$

$$\therefore \mu^*(B_j \setminus E_j) = 0 \quad \forall j \implies \mu^*(B \setminus E) = 0$$

Por otro lado, usando las propiedades de ser disjuntos a pares (los E_j entre sí, los B_j entre sí, etc.) tenemos:

$$B = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j} \quad (*)$$

Para la última igualdad:

$\underline{\subseteq}$: Si x está en la izquierda, entonces $\exists j_0 \ni$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j_0}$$

$\Rightarrow \forall k \quad x \in \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j_0}$

$\Rightarrow \forall k \quad x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j}$

$\Rightarrow$ x en el lado derecho.

2: Si x está en el lado derecho, entonces

$\forall k \quad x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j}$

$\Rightarrow \forall k \ \exists j_k \ni x \in \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j_k} \subseteq A_{j_k}$

Pero los distintos A_j son disjuntos. Por tanto $\exists j_0$ $\ni j_k = j_0 \ \forall k$.

$\Rightarrow \exists j_0 \ni \forall k \ x \in \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j_0}$

$\Rightarrow \exists j_0 \ni x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{kl}^{j_0}$

$\Rightarrow$ x está en el lado izquierdo.

(*) prueba que $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ y así se cumple la afirmación.

//

Las tres afirmaciones de arriba prueban que:

$$\forall E \in \mathcal{M}^* \ \exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$$
$$\ni E \subseteq B, \ \mu^*(B \setminus E) = 0$$

Pero entonces:

$$\inf\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_0(A_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} B \setminus E \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \\ A_j \in \mathcal{A} \end{array} \right\} = 0$$

Usando argumentos como arriba $\exists \{F_k\}_k \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ decreciente $\ni$:

$$B \setminus E \subseteq \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k = N \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

$$\mu(N) = \lim_{k \to +\infty} \mu(F_k) = 0$$

Luego $B \setminus E \in \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ (la completación). Y por tanto:

$$E = B \setminus (B \setminus E) \in \overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}.$$

Esto concluye la demostración de $**)$ y así del Teorema A.

Observación:

Una conclusión del Teorema A es la siguiente afirmación:

E es μ^*-medible

$\iff \exists\, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $E \subseteq B$

$\ni \underbrace{\mu^*(B \setminus E)}= 0$

$$\inf\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_0(A_j) \;\middle|\; B \setminus E \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j, \; A_j \in \mathcal{A} \right\}$$

que se calcula solamente con μ_0.