Análisis Armónico y Grupos: Parte 3

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Mexico

Escuela de Verano 2022, Cimat
8 de julio de 2022

1. Transformadas y representaciones
   - Series de Fourier
   - Transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$
   - Análisis en $\mathbb{Z}^n$
   - Dualidad de $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$
   - Dualidad para $\mathbb{R}^n$
   - Descomposición en subespacios irreducibles
2. Análisis armónico en grupos topológicos

- Para el grupo $\mathbb{T}^n$ recordamos los coeficientes y las series de Fourier.

- Para el grupo $\mathbb{T}^n$ recordamos los coeficientes y las series de Fourier.
  - Los homomorfismos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ están dados por las funciones $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

- Para el grupo $\mathbb{T}^n$ recordamos los coeficientes y las series de Fourier.
  - Los homomorfismos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ están dados por las funciones $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.
  - Las funciones $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ forman un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$

$$\langle z^\alpha, z^\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$

- Para el grupo $\mathbb{T}^n$ recordamos los coeficientes y las series de Fourier.
  - Los homomorfismos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ están dados por las funciones $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.
  - Las funciones $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ forman un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$
$$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$
  - Para $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ los coeficientes de Fourier de f se calculan como las componentes respecto de este conjunto ortonormal
$$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha \rangle.$$

- Para el grupo $\mathbb{T}^n$ recordamos los coeficientes y las series de Fourier.
  - Los homomorfismos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ están dados por las funciones $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.
  - Las funciones $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ forman un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$
  $$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$
  - Para $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ los coeficientes de Fourier de f se calculan como las componentes respecto de este conjunto ortonormal
  $$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha \rangle.$$
  - La función f se recupera de sus coeficientes de Fourier (fórmula de inversión)
  $$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha.$$

- Para el grupo $\mathbb{T}^n$ recordamos los coeficientes y las series de Fourier.
  - Los homomorfismos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ están dados por las funciones $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.
  - Las funciones $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ forman un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$
$$\langle z^\alpha, z^\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$
  - Para $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ los coeficientes de Fourier de f se calculan como las componentes respecto de este conjunto ortonormal
$$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha\rangle.$$
  - La función f se recupera de sus coeficientes de Fourier (fórmula de inversión)
$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha.$$
  - En particular, el conjunto $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ es una **base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$**.

Corolario

Los elementos de $L^2(\mathbb{T}^n)$ *se pueden expresar como una serie en términos de los homomorfismos* $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$. *Más específicamente, el mapeo* $L^2(\mathbb{T}^n) \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ *dado por*

$$f \mapsto (\widehat{f}(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$$

es unitario con inversa dada por

$$(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha .$$

Corolario

Los elementos de $L^2(\mathbb{T}^n)$ *se pueden expresar como una serie en términos de los homomorfismos* $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$*. Más específicamente, el mapeo* $L^2(\mathbb{T}^n) \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ *dado por*

$$f \mapsto (\widehat{f}(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$$

es unitario con inversa dada por

$$(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha .$$

- El espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$ tiene una forma alternativa dada por $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, donde $\mathbb{Z}^n$ es un grupo.

Corolario

Los elementos de $L^2(\mathbb{T}^n)$ *se pueden expresar como una serie en términos de los homomorfismos* $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$. *Más específicamente, el mapeo* $L^2(\mathbb{T}^n) \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ *dado por*

$$f \mapsto (\widehat{f}(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$$

es unitario con inversa dada por

$$(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha .$$

- El espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$ tiene una forma alternativa dada por $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, donde $\mathbb{Z}^n$ es un grupo.
- En el grupo $\mathbb{Z}^n$ la topología natural es la discreta. La medida de contar en $\mathbb{Z}^n$ es una medida de Radon invariante bajo traslaciones.

- Problema: Desarrollar una transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$.

- Problema: Desarrollar una transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$.
- En base a lo observado con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ el procedimiento es el siguiente.

- Problema: Desarrollar una transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$.
- En base a lo observado con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ el procedimiento es el siguiente.
  - Hallar una medida de Radon en $\mathbb{Z}^n$ invariante bajo traslaciones. Solución: la medida de contar $\mu = \mu_c^n$.

- Problema: Desarrollar una transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$.
- En base a lo observado con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ el procedimiento es el siguiente.
  - Hallar una medida de Radon en $\mathbb{Z}^n$ invariante bajo traslaciones. Solución: la medida de contar $\mu = \mu_c^n$.
  - Definir los espacios $L^1(\mathbb{Z}^n, \mu)$ y $L^2(\mathbb{Z}^n, \mu)$.

- Problema: Desarrollar una transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$.
- En base a lo observado con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ el procedimiento es el siguiente.
  - Hallar una medida de Radon en $\mathbb{Z}^n$ invariante bajo traslaciones. Solución: la medida de contar $\mu = \mu_c^n$.
  - Definir los espacios $L^1(\mathbb{Z}^n, \mu)$ y $L^2(\mathbb{Z}^n, \mu)$.
  - Describir las representaciones $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$.

- Problema: Desarrollar una transformada para el grupo $\mathbb{Z}^n$.
- En base a lo observado con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ el procedimiento es el siguiente.
  - Hallar una medida de Radon en $\mathbb{Z}^n$ invariante bajo traslaciones. Solución: la medida de contar $\mu = \mu_c^n$.
  - Definir los espacios $L^1(\mathbb{Z}^n, \mu)$ y $L^2(\mathbb{Z}^n, \mu)$.
  - Describir las representaciones $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$.
  - La transformada se obtiene tomando producto interno de funciones en $\mathbb{Z}^n$ con representaciones de $\mathbb{Z}^n$.

- La topología elegida en $\mathbb{Z}^n$ es la discreta. Por tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$.

- La topología elegida en $\mathbb{Z}^n$ es la discreta. Por tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$.
- Toda función $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ es continua y medible. Tal f se puede identificar con la sucesión $(f(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

- La topología elegida en $\mathbb{Z}^n$ es la discreta. Por tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$.
- Toda función $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ es continua y medible. Tal f se puede identificar con la sucesión $(f(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.
- Dada $f : \mathbb{Z}^n \to [0, \infty)$ podemos escribir

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} f(\alpha) \chi_{\{\alpha\}}.$$

- La topología elegida en $\mathbb{Z}^n$ es la discreta. Por tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$.
- Toda función $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ es continua y medible. Tal f se puede identificar con la sucesión $(f(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$.
- Dada $f : \mathbb{Z}^n \to [0, \infty)$ podemos escribir

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(\alpha)\chi_{\{\alpha\}}.$$

Como esta suma es numerable y $\mu(\{\alpha\}) = 1$, tenemos

$$\int_{\mathbb{Z}^n} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(\alpha).$$

- La topología elegida en $\mathbb{Z}^n$ es la discreta. Por tanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^n} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$.
- Toda función $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ es continua y medible. Tal f se puede identificar con la sucesión $(f(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$.
- Dada $f : \mathbb{Z}^n \to [0,\infty)$ podemos escribir

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(\alpha)\chi_{\{\alpha\}}.$$

Como esta suma es numerable y $\mu(\{\alpha\}) = 1$, tenemos

$$\int_{\mathbb{Z}^n} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(\alpha).$$

Corolario

El espacio $L^1(\mathbb{Z}^n,\mu)$ consta de las sucesiones $(f(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ absolutamente sumables. Es decir, $L^1(\mathbb{Z}^n,\mu) = \ell^1(\mathbb{Z}^n)$.

- Similarmente, $L^2(\mathbb{Z}^n, \mu) = \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, el espacio de sucesiones indexadas por $\mathbb{Z}^n$ que son cuadrado sumables.

- Similarmente, $L^2(\mathbb{Z}^n, \mu) = \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, el espacio de sucesiones indexadas por $\mathbb{Z}^n$ que son cuadrado sumables.

Ejercicio

Probar que $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ y $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ son espacios de Banach y de Hilbert respectivamente.

- Similarmente, $L^2(\mathbb{Z}^n, \mu) = \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, el espacio de sucesiones indexadas por $\mathbb{Z}^n$ que son cuadrado sumables.

Ejercicio

Probar que $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ y $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ son espacios de Banach y de Hilbert respectivamente.

- Tenemos los espacios relevantes para $\mathbb{Z}^n$: $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ y $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

Proposición

Para cada $z \in \mathbb{T}^n$ fijo, el mapeo $\pi_z : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$ dado por $\alpha \mapsto z^\alpha$ es un homomorfismo. Más aún, la familia $\{\pi_z \mid z \in \mathbb{T}^n\}$ es el conjunto de todos los homomorfismos $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$.

Proposición

Para cada $z \in \mathbb{T}^n$ fijo, el mapeo $\pi_z : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$ dado por $\alpha \mapsto z^\alpha$ es un homomorfismo. Más aún, la familia $\{\pi_z \mid z \in \mathbb{T}^n\}$ es el conjunto de todos los homomorfismos $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$.

- Por simplicidad los elementos de $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ y $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ se denotarán como sucesiones $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$. En particular, $\pi_z = (z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, donde $z \in \mathbb{T}^n$ es fijo.

Proposición

Para cada $z \in \mathbb{T}^n$ fijo, el mapeo $\pi_z : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$ dado por $\alpha \mapsto z^\alpha$ es un homomorfismo. Más aún, la familia $\{\pi_z \mid z \in \mathbb{T}^n\}$ es el conjunto de todos los homomorfismos $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$.

- Por simplicidad los elementos de $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ y $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ se denotarán como sucesiones $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$. En particular, $\pi_z = (z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$, donde $z \in \mathbb{T}^n$ es fijo.
- Para una sucesión $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$, su transformada de Fourier se define como la asignación

$$z \mapsto \langle (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}, \pi_z\rangle = \langle (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}, (z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha.$$

- Esto define una función $f_c : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$. ¿Cuándo está bien definida?

- Sea $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ una sucesión compleja dada.

- Sea $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ una sucesión compleja dada.
- Si $z \in \mathbb{T}^n$ y $c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$, entonces $f_c(z)$ es una serie absolutamente convergente. En este caso, f_c está bien definida.

- Sea $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ una sucesión compleja dada.
- Si $z \in \mathbb{T}^n$ y $c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$, entonces $f_c(z)$ es una serie absolutamente convergente. En este caso, f_c está bien definida.
- Si $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, entonces la función

$$f_c(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha$$

está bien definida si la convergencia se toma en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

- Sea $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ una sucesión compleja dada.
- Si $z \in \mathbb{T}^n$ y $c \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$, entonces $f_c(z)$ es una serie absolutamente convergente. En este caso, f_c está bien definida.
- Si $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, entonces la función

$$f_c(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha$$

está bien definida si la convergencia se toma en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Definición

*La **transformada de** $\mathbb{Z}^n$ es el mapeo $\ell^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n)$ que a cada $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ asigna la función $\widehat{c} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{c}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha,$$

con convergencia en el sentido de $L^2(\mathbb{T}^n)$.

- Comparamos la transformada de $\mathbb{Z}^n$ y la inversa de la transformada de $\mathbb{T}^n$.

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ c &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha \right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ \widehat{f} &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \right) \end{aligned}$$

- Comparamos la transformada de $\mathbb{Z}^n$ y la inversa de la transformada de $\mathbb{T}^n$.

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ c &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha \right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ \widehat{f} &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \right) \end{aligned}$$

- Salvo por uno de los mapeos $z \mapsto \overline{z}$ o $\alpha \mapsto -\alpha$, estas dos transformaciones son la misma.

- Comparamos la transformada de $\mathbb{Z}^n$ y la inversa de la transformada de $\mathbb{T}^n$.

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ c &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha \right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ \widehat{f} &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \right) \end{aligned}$$

- Salvo por uno de los mapeos $z \mapsto \overline{z}$ o $\alpha \mapsto -\alpha$, estas dos transformaciones son la misma.

Proposición

Salvo por el mapeo de inversión o salvo por convención en sus definiciones, las transformadas en espacios L^2 de los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ son una inversa de la otra.

- Comparamos la transformada de $\mathbb{Z}^n$ y la inversa de la transformada de $\mathbb{T}^n$.

$$\ell^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n) \qquad\qquad \ell^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n)$$

$$c \mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha \right) \qquad\qquad \widehat{f} \mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha \right)$$

- Salvo por uno de los mapeos $z \mapsto \overline{z}$ o $\alpha \mapsto -\alpha$, estas dos transformaciones son la misma.

Proposición

Salvo por el mapeo de inversión o salvo por convención en sus definiciones, las transformadas en espacios L^2 de los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ son una inversa de la otra.

- **Los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ son (mutuamente) duales.**

- Comparamos la transformada de $\mathbb{Z}^n$ y la inversa de la transformada de $\mathbb{T}^n$.

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ c &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \overline{z}^\alpha\right)\end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to L^2(\mathbb{T}^n) \\ \widehat{f} &\mapsto \left(z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha\right)\end{aligned}$$

- Salvo por uno de los mapeos $z \mapsto \overline{z}$ o $\alpha \mapsto -\alpha$, estas dos transformaciones son la misma.

Proposición

Salvo por el mapeo de inversión o salvo por convención en sus definiciones, las transformadas en espacios L^2 de los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ son una inversa de la otra.

- **Los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ son (mutuamente) duales.**

Ejercicio

Obtener las fórmulas de Plancherel y de inversión para $\mathbb{Z}^n$.

- Problema: ¿Cuál es el grupo dual de $\mathbb{R}^n$?

- Problema: ¿Cuál es el grupo dual de $\mathbb{R}^n$?
  - Las representaciones unitarias $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$ están parametrizadas por $\mathbb{R}^n$ mismo: para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos $y \mapsto e^{ix\cdot y}$.

- Problema: ¿Cuál es el grupo dual de $\mathbb{R}^n$?
  - Las representaciones unitarias $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$ están parametrizadas por $\mathbb{R}^n$ mismo: para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos $y \mapsto e^{ix\cdot y}$.
  - La transformada de Fourier y su inversa son

$$L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-ix\cdot y}\,\mathrm{dm}(y)\right)$$
$$L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{ix\cdot y}\,\mathrm{dm}(y)\right)$$

- Problema: ¿Cuál es el grupo dual de $\mathbb{R}^n$?
  - Las representaciones unitarias $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$ están parametrizadas por $\mathbb{R}^n$ mismo: para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos $y \mapsto e^{ix\cdot y}$.
  - La transformada de Fourier y su inversa son

$$\begin{aligned}
&L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)\\
&\qquad f \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix\cdot y}\, \mathrm{dm}(y)\right)\\
&L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)\\
&\qquad f \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix\cdot y}\, \mathrm{dm}(y)\right)
\end{aligned}$$

- El grupo $\mathbb{R}^n$ es su propio dual.

- Por la fórmula de inversión para $\mathbb{T}^n$, para toda $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ se cumple
$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \langle f, z^\alpha \rangle z^\alpha,$$
la expresión de f en términos de la base ortonormal $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

- Por la fórmula de inversión para $\mathbb{T}^n$, para toda $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ se cumple

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \langle f, z^\alpha \rangle z^\alpha,$$

la expresión de f en términos de la base ortonormal $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

- Esto lo escribimos como una **suma directa de espacios de Hilbert**

$$L^2(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{C} z^\alpha.$$

- Por la fórmula de inversión para $\mathbb{T}^n$, para toda $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ se cumple
$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \langle f, z^\alpha \rangle z^\alpha,$$
la expresión de f en términos de la base ortonormal $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.
- Esto lo escribimos como una **suma directa de espacios de Hilbert**
$$L^2(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{C} z^\alpha.$$

Corolario

El espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$ es la suma directa de los espacios 1-dimensionales generados por las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{T}^n$.

- Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (adecuada), la fórmula de inversión de la transformada de Fourier nos da

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{ix \cdot y} \, \mathrm{dm}(y).$$

- Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (adecuada), la fórmula de inversión de la transformada de Fourier nos da

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{ix\cdot y} \, \mathrm{dm}(y).$$

- Toda función es una integral con pesos de las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$.

- Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (adecuada), la fórmula de inversión de la transformada de Fourier nos da

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{ix\cdot y} \, \mathrm{dm}(y).$$

- Toda función es una integral con pesos de las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$.
- Esto lo escribimos como

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{C} e^{i(\cdot)\cdot y} \, \mathrm{dm}(y).$$

- Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (adecuada), la fórmula de inversión de la transformada de Fourier nos da

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{ix\cdot y}\, \mathrm{dm}(y).$$

- Toda función es una integral con pesos de las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$.
- Esto lo escribimos como

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{C} e^{i(\cdot)\cdot y}\, \mathrm{dm}(y).$$

Corolario

*El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ es la **integral directa** de los espacios 1-dimensionales generados por las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$.*

1. Transformadas y representaciones

2. Análisis armónico en grupos topológicos
   - Medidas de Haar
   - Análisis armónico en grupos compactos

- En lo sucesivo G es un grupo topológico localmente compacto, es decir

- En lo sucesivo G es un grupo topológico localmente compacto, es decir
  - G es grupo y espacio topológico.

- En lo sucesivo G es un grupo topológico localmente compacto, es decir
  - G es grupo y espacio topológico.
  - Las operaciones $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.

- En lo sucesivo G es un grupo topológico localmente compacto, es decir
  - G es grupo y espacio topológico.
  - Las operaciones $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.
  - G es Hausdorff y localmente compacto.

- En lo sucesivo G es un grupo topológico localmente compacto, es decir
  - G es grupo y espacio topológico.
  - Las operaciones $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.
  - G es Hausdorff y localmente compacto.

Teorema

Si G es un grupo topológico localmente compacto, entonces

- *Existe una medida de Radon $\mu = \mu_G$ invariante bajo traslaciones izquierdas: $\mu(xE) = \mu(E)$ para todo $x \in G$ y $E \subset G$ subconjunto de Borel.*
- *Si μ_1, μ_2 son dos medidas de Radon invariantes bajo traslaciones izquierdas, entonces existe $c > 0$ tal que $\mu_1 = c\mu_2$.*

*A cualquiera de estas medidas la llamamos **medida de Haar de** G.*

- La medida de Lebesgue es de Haar para $\mathbb{R}^n$.

- La medida de Lebesgue es de Haar para $\mathbb{R}^n$.
- La medida $\mu_{\mathbb{T}^n}$ es de Haar para $\mathbb{T}^n$.

- La medida de Lebesgue es de Haar para $\mathbb{R}^n$.
- La medida $\mu_{\mathbb{T}^n}$ es de Haar para $\mathbb{T}^n$.
- La medida $\frac{\mathrm{dm}(x)}{x} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ es de Haar para $\mathbb{R}_+$.

- La medida de Lebesgue es de Haar para $\mathbb{R}^n$.
- La medida $\mu_{\mathbb{T}^n}$ es de Haar para $\mathbb{T}^n$.
- La medida $\frac{\mathrm{dm}(x)}{x} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ es de Haar para $\mathbb{R}_+$.
- Si G es un grupo dotado de la topología discreta, entonces la medida de contar es de Haar.

- La medida de Lebesgue es de Haar para $\mathbb{R}^n$.
- La medida $\mu_{\mathbb{T}^n}$ es de Haar para $\mathbb{T}^n$.
- La medida $\frac{\mathrm{d}m(x)}{x} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ es de Haar para $\mathbb{R}_+$.
- Si G es un grupo dotado de la topología discreta, entonces la medida de contar es de Haar.
- Todas estas medidas son también invariantes por la derecha: $\mu(Ex) = \mu(E)$ para todo $x \in G$ y $E \subset G$ subconjunto de Borel.

- El grupo $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de transformaciones afines de $\mathbb{R}$ es dado por el grupo de matrices de la forma

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ y $b \in \mathbb{R}$.

- El grupo $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de transformaciones afines de $\mathbb{R}$ es dado por el grupo de matrices de la forma

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ y $b \in \mathbb{R}$.

- Una matriz $M(a,b)$ actúa sobre $x \in \mathbb{R}$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- El grupo $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de transformaciones afines de $\mathbb{R}$ es dado por el grupo de matrices de la forma

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ y $b \in \mathbb{R}$.

- Una matriz $M(a, b)$ actúa sobre $x \in \mathbb{R}$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- El grupo $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ es topológico y podemos dotarlo de la medida de Lebesgue

$$\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}m^2(x, y).$$

- La traslación por la izquierda por $M(a, b)$ es dada por

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es afín en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ con parte lineal aI_2.

- La traslación por la izquierda por $M(a, b)$ es dada por

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  la cual es afín en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ con parte lineal aI_2.
- Por tanto, una medida de Haar de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ es dada por

$$\mathrm{d}\mu_L(x, y) = \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{x^2}$$

- La traslación por la derecha por $M(a,b)$ es dada por

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es lineal en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es a.

- La traslación por la derecha por $M(a,b)$ es dada por

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es lineal en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es a.

- Por tanto, μ_L no es invariante bajo traslaciones derechas. Pero

$$\mathrm{d}\mu_R(x,y) = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x}$$

es invariante bajo traslaciones derechas.

- Por lo anterior, para cualquier grupo topológico localmente compacto G hablamos de **medidas de Haar izquierdas** y **medidas de Haar derechas**.

- Por lo anterior, para cualquier grupo topológico localmente compacto G hablamos de **medidas de Haar izquierdas** y **medidas de Haar derechas**.
- Si el grupo es Abeliano, entonces ambos tipos son el mismo. Para grupos no Abelianos, no son iguales en general.

Teorema

Sea G un grupo topológico compacto. Entonces, toda medida de Haar izquierda μ satisface las siguientes propiedades.

- *μ es finita. Por tanto, existe una única medida de Haar izquierda tal que $\mu(G) = 1$.*
- *μ es invariante por traslaciones derechas.*
- *μ es invariante bajo la transformación $x \mapsto x^{-1}$.*

- Ejemplos de grupos topológicos compactos.

- Ejemplos de grupos topológicos compactos.
  - El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

- Ejemplos de grupos topológicos compactos.
  - El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.
  - El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^\top A = I_n$.

- Ejemplos de grupos topológicos compactos.
  - El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.
  - El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^\top A = I_n$.
  - El grupo unitario $\mathrm{U}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^* A = I_n$.

- Ejemplos de grupos topológicos compactos.
  - El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.
  - El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^\top A = I_n$.
  - El grupo unitario $\mathrm{U}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^* A = I_n$.
  - Los grupos especial ortogonal $\mathrm{SO}(n)$ y especial unitario $\mathrm{SU}(n)$: agregar la condición $\det(A) = 1$.

- Ejemplos de grupos topológicos compactos.
  - El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.
  - El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^\top A = I_n$.
  - El grupo unitario $\mathrm{U}(n)$: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^* A = I_n$.
  - Los grupos especial ortogonal $\mathrm{SO}(n)$ y especial unitario $\mathrm{SU}(n)$: agregar la condición $\det(A) = 1$.

Ejercicio

Probar que el grupo $\mathrm{SU}(2)$ es homeomorfo a la esfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$: $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tal que $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

- En lo sucesivo, consideramos $L^1(G)$ y $L^2(G)$ para una medida de Haar μ de probabilidad (izquierda y derecha).

- En lo sucesivo, consideramos $L^1(G)$ y $L^2(G)$ para una medida de Haar μ de probabilidad (izquierda y derecha).
- El grupo G actúa sobre $L^2(G)$ mediante dos posibles acciones

$$\begin{aligned} L : G \times L^2(G) &\to L^2(G) & \qquad R : G \times L^2(G) &\to L^2(G) \\ (L_x(f))(y) &= f(x^{-1}y) & (R_x(f))(y) &= f(yx). \end{aligned}$$

Ambas son unitarias.

- En lo sucesivo, consideramos $L^1(G)$ y $L^2(G)$ para una medida de Haar μ de probabilidad (izquierda y derecha).
- El grupo G actúa sobre $L^2(G)$ mediante dos posibles acciones

$$L : G \times L^2(G) \to L^2(G) \qquad R : G \times L^2(G) \to L^2(G)$$
$$(L_x(f))(y) = f(x^{-1}y) \qquad (R_x(f))(y) = f(yx).$$

  Ambas son unitarias.
- La convolución se define de manera análoga al caso de $\mathbb{R}^n$. Dados f en $L^1(G)$ y g en $L^1(G)$ o g en $L^2(G)$ definimos la convolución $f * g : G \to \mathbb{C}$ por

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

- ¿Cómo se construye la transformada de Fourier para un grupo compacto G?

- ¿Cómo se construye la transformada de Fourier para un grupo compacto G?
- Debe generalizar al caso de $\mathbb{T}^n$, por lo cual esperamos una serie.

- ¿Cómo se construye la transformada de Fourier para un grupo compacto G?
- Debe generalizar al caso de $\mathbb{T}^n$, por lo cual esperamos una serie.
- El mecanismo es el siguiente

- ¿Cómo se construye la transformada de Fourier para un grupo compacto G?
- Debe generalizar al caso de $\mathbb{T}^n$, por lo cual esperamos una serie.
- El mecanismo es el siguiente
  - En el grupo G encontrar una medida invariante: medida de Haar.

- ¿Cómo se construye la transformada de Fourier para un grupo compacto G?
- Debe generalizar al caso de $\mathbb{T}^n$, por lo cual esperamos una serie.
- El mecanismo es el siguiente
  - En el grupo G encontrar una medida invariante: medida de Haar.
  - Considerar el espacio $L^2(G)$: obtenido de la medida de Haar.

- ¿Cómo se construye la transformada de Fourier para un grupo compacto G?
- Debe generalizar al caso de $\mathbb{T}^n$, por lo cual esperamos una serie.
- El mecanismo es el siguiente
  - En el grupo G encontrar una medida invariante: medida de Haar.
  - Considerar el espacio $L^2(G)$: obtenido de la medida de Haar.
  - Hallar las representaciones unitarias irreducibles de G: más difícil que en el caso Abeliano.

Teorema

- *Sea G un grupo compacto y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una acción lineal unitaria continua (**representación unitaria**) **irreducible**, entonces $\mathcal{H}$ es de dimensión finita. En particular, toda representación unitaria irreducible es dada por un homomorfismo de la forma $\pi : G \to \mathrm{U}(m)$.*

Teorema

- *Sea G un grupo compacto y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una acción lineal unitaria continua (**representación unitaria**) **irreducible**, entonces $\mathcal{H}$ es de dimensión finita. En particular, toda representación unitaria irreducible es dada por un homomorfismo de la forma $\pi : G \to \mathrm{U}(m)$.*
- *Si G es no Abeliano, entonces existe una representación unitaria irreducible $\pi : G \to \mathrm{U}(m)$ con $m \geq 2$.*

Teorema

- *Sea G un grupo compacto y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una acción lineal unitaria continua (**representación unitaria**) **irreducible**, entonces $\mathcal{H}$ es de dimensión finita. En particular, toda representación unitaria irreducible es dada por un homomorfismo de la forma $\pi : G \to \mathrm{U}(m)$.*
- *Si G es no Abeliano, entonces existe una representación unitaria irreducible $\pi : G \to \mathrm{U}(m)$ con $m \geq 2$.*
- *La familia $\{\pi_j\}_{j \in J}$ de representaciones unitarias irreducibles de G es numerable.*

- Sea G un grupo compacto y $\{\pi_j\}_{j\in J}$ su familia de representaciones unitarias irreducibles. Para $f \in L^2(G)$ una posible definición de la transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(j) = \int_G f(y)\pi_j(y)^* \,\mathrm{d}\mu(y),$$

donde $j \in J$.

- Sea G un grupo compacto y $\{\pi_j\}_{j\in J}$ su familia de representaciones unitarias irreducibles. Para $f \in L^2(G)$ una posible definición de la transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(j) = \int_G f(y)\pi_j(y)^* \,\mathrm{d}\mu(y),$$

donde $j \in J$.

- Esto requiere una integración a valores matriciales.

- Sea G un grupo compacto y $\{\pi_j\}_{j\in J}$ su familia de representaciones unitarias irreducibles. Para $f \in L^2(G)$ una posible definición de la transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(j) = \int_G f(y)\pi_j(y)^* \,\mathrm{d}\mu(y),$$

donde $j \in J$.

- Esto requiere una integración a valores matriciales.
- Alternativamente podemos usar los coeficientes matriciales de los elementos de $\{\pi_j\}_{j\in J}$: Teorema de Peter-Weyl.

- Sea G un grupo compacto y $\{\pi_j\}_{j\in J}$ su familia de representaciones unitarias irreducibles. Para $f \in L^2(G)$ una posible definición de la transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(j) = \int_G f(y)\pi_j(y)^* \, \mathrm{d}\mu(y),$$

donde $j \in J$.

- Esto requiere una integración a valores matriciales.
- Alternativamente podemos usar los coeficientes matriciales de los elementos de $\{\pi_j\}_{j\in J}$: Teorema de Peter-Weyl.

Ejercicio (**)

Investigar sobre el Teorema de Peter-Weyl.