Tarea 1.

1) Sea $f: G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos.

a) Probar que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ $\forall x \in G$.

b) Probar que $\forall x, y \in G$ se cumple $f(x)f(y)^{-1} \in f(G)$, para concluir que $f(G)$ es subgrupo de H.

c) Probar que $f(e_G)$ es la unidad de $f(G)$ y concluir así que $f(e_G) = e_H$.

2) Sea H un subgrupo de G de índice 2. Probar que $xH = Hx \quad \forall x \in G$.

3) Sea:

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad-bc=1 \end{array} \right\}.$$

Probar que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

es un subgrupo y que existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tal que:

$$AH \neq HA$$

(Sugerencia: Buscar una matriz $A \in SL(2,\mathbb{R})$ que no conmute con
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
)

4) Probar que un grupo G es Abeliano si y sólo si el mapeo
$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$
es un homomorfismo de grupos.

5) Sea Q_8 el subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$ generado por:

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Probar que Q_8 es un grupo no Abeliano de orden 8.

(Sugerencia: Probar que $BA = A^3 B$ para concluir que $X \in Q_8 \iff X = A^k B^\ell$ para algunos $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Luego probar y usar que $A^4 = B^4 = I_2$)

6) Sea $f: G \longrightarrow H$ un homomorfismo y $x \in G$ de orden finito. Probar que $f(x)$ es de orden finito y que $|f(x)|$ divide a $|x|$.

7) Sea G un grupo Abeliano y $T = \{x \in G \mid |x| < +\infty\}$. Probar que T es un subgrupo de G.

8) Sean G y H dos grupos. En el conjunto $G \times H$ defina la operación:

$$(G\times H)\times(G\times H)\longrightarrow G\times H$$

$$((g_1,h_1),(g_2,h_2))\longmapsto(g_1g_2,h_1h_2).$$

Probar que $G\times H$ es un grupo con esta operación.

(Notación: Si G, H son Abelianos escribimos

$$G\oplus H$$

en vez de $G\times H$)

9) Probar que $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ no es cíclico. Concluir que no es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

10) Sea:

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}.$$

Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, S^1 posee un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.