

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Espacios de Hilbert e integración de Lebesgue

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

1 Espacios de Hilbert

2 Espacios L^2

1 Espacios de Hilbert

2 Espacios L^2

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).
 - ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).
 - ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano.
 - ▶ La norma en $\mathcal{H}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es completa: toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathcal{H}$.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).
 - ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano.
 - ▶ La norma en $\mathcal{H}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es completa: toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathcal{H}$.
- ◇ Los espacios con producto interno (no necesariamente completos) cumplen ciertas propiedades bien conocidas.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).
 - ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano.
 - ▶ La norma en $\mathcal{H}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es completa: toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathcal{H}$.
- ◇ Los espacios con producto interno (no necesariamente completos) cumplen ciertas propiedades bien conocidas.
 - ▶ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).
 - ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano.
 - ▶ La norma en $\mathcal{H}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es completa: toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathcal{H}$.
- ◇ Los espacios con producto interno (no necesariamente completos) cumplen ciertas propiedades bien conocidas.
 - ▶ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.
 - ▶ (Desigualdad triangular): $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo (aunque se puede considerar el caso real).
 - ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano.
 - ▶ La norma en $\mathcal{H}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es completa: toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathcal{H}$.
- ◇ Los espacios con producto interno (no necesariamente completos) cumplen ciertas propiedades bien conocidas.
 - ▶ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.
 - ▶ (Desigualdad triangular): $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
 - ▶ (Ley del paralelogramo): $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

- ◇ Ejemplos de espacios con producto interno y de Hilbert.

◇ Ejemplos de espacios con producto interno y de Hilbert.

► $\mathbb{C}^n$ con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$.

◇ Ejemplos de espacios con producto interno y de Hilbert.

- ▶ $\mathbb{C}^n$ con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$.
- ▶ El espacio de sucesiones $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ finitas (son cero a partir de un índice) con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} z_j \overline{w}_j$.

◇ Ejemplos de espacios con producto interno y de Hilbert.

- ▶ $\mathbb{C}^n$ con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$.
- ▶ El espacio de sucesiones $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ finitas (son cero a partir de un índice) con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} z_j \overline{w}_j$.
- ▶ El espacio $C([a, b])$ (funciones a valores complejos, continuas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$) con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

◇ Ejemplos de espacios con producto interno y de Hilbert.

- ▶ $\mathbb{C}^n$ con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$.
- ▶ El espacio de sucesiones $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ finitas (son cero a partir de un índice) con el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} z_j \overline{w}_j$.
- ▶ El espacio $C([a, b])$ (funciones a valores complejos, continuas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$) con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

- ◇ El primero es un espacio de Hilbert. Los otros dos ejemplos no son de Hilbert.

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$, para cualesquiera $j, k \in J$,

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$, para cualesquiera $j, k \in J$,
 - ▶ para todo $u \in \mathcal{H}$ se tiene $u = \sum_{j \in J} \langle u, u_j \rangle u_j$.

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$, para cualesquiera $j, k \in J$,
 - ▶ para todo $u \in \mathcal{H}$ se tiene $u = \sum_{j \in J} \langle u, u_j \rangle u_j$.
- ◇ El proceso de Gram-Schmidt permite generar conjuntos unitarios. Pero en dimensión infinita, no siempre dan lugar a bases.

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$, para cualesquiera $j, k \in J$,
 - ▶ para todo $u \in \mathcal{H}$ se tiene $u = \sum_{j \in J} \langle u, u_j \rangle u_j$.
- ◇ El proceso de Gram-Schmidt permite generar conjuntos unitarios. Pero en dimensión infinita, no siempre dan lugar a bases.
- ◇ Todo espacio de Hilbert tiene una base unitaria.

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$, para cualesquiera $j, k \in J$,
 - ▶ para todo $u \in \mathcal{H}$ se tiene $u = \sum_{j \in J} \langle u, u_j \rangle u_j$.
- ◇ El proceso de Gram-Schmidt permite generar conjuntos unitarios. Pero en dimensión infinita, no siempre dan lugar a bases.
- ◇ Todo espacio de Hilbert tiene una base unitaria.
- ◇ Cualesquiera dos bases unitarias tienen el mismo número de elementos, en el sentido de cardinalidad de conjuntos.

- ◇ En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una base unitaria es un conjunto $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$, para cualesquiera $j, k \in J$,
 - ▶ para todo $u \in \mathcal{H}$ se tiene $u = \sum_{j \in J} \langle u, u_j \rangle u_j$.
- ◇ El proceso de Gram-Schmidt permite generar conjuntos unitarios. Pero en dimensión infinita, no siempre dan lugar a bases.
- ◇ Todo espacio de Hilbert tiene una base unitaria.
- ◇ Cualesquiera dos bases unitarias tienen el mismo número de elementos, en el sentido de cardinalidad de conjuntos.
- ◇ Los espacios de Hilbert que poseen bases unitarias contables son llamados separables.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces T no es necesariamente continuo.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces T no es necesariamente continuo.
 - ▶ T es continuo si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Tales transformaciones son llamadas operadores acotados.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces T no es necesariamente continuo.
 - ▶ T es continuo si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Tales transformaciones son llamadas operadores acotados.
 - ▶ Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el espacio de operadores acotados $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ con norma

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } u \in \mathcal{H}\}.$$

Obtenemos un espacio de Banach (normado y completo), pero no es necesariamente de Hilbert.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces T no es necesariamente continuo.
 - ▶ T es continuo si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Tales transformaciones son llamadas operadores acotados.
 - ▶ Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el espacio de operadores acotados $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ con norma

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } u \in \mathcal{H}\}.$$

Obtenemos un espacio de Banach (normado y completo), pero no es necesariamente de Hilbert.

- ▶ Cuando $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ escribimos $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces T no es necesariamente continuo.
 - ▶ T es continuo si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Tales transformaciones son llamadas operadores acotados.
 - ▶ Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el espacio de operadores acotados $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ con norma

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } u \in \mathcal{H}\}.$$

Obtenemos un espacio de Banach (normado y completo), pero no es necesariamente de Hilbert.

- ▶ Cuando $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ escribimos $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- ▶ Cuando $\mathcal{H}' = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^*$.

- ◇ Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ una transformación lineal.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, entonces T no es necesariamente continuo.
 - ▶ T es continuo si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Tales transformaciones son llamadas operadores acotados.
 - ▶ Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el espacio de operadores acotados $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ con norma

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tu\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } u \in \mathcal{H}\}.$$

Obtenemos un espacio de Banach (normado y completo), pero no es necesariamente de Hilbert.

- ▶ Cuando $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ escribimos $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- ▶ Cuando $\mathcal{H}' = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^*$.
- ▶ Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos una transformación anti-lineal continua $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ dada por $u \mapsto \langle \cdot, u \rangle$. Este mapeo es biyectivo.

- ◇ Para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el operador adjunto T^* es el único elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dado por la condición $\langle Tu, u' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle u, T^* u' \rangle_{\mathcal{H}}$.

- ◇ Para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el operador adjunto T^* es el único elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dado por la condición $\langle Tu, u' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle u, T^* u' \rangle_{\mathcal{H}}$.
- ◇ Dado un operador acotado $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definimos

- ◇ Para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el operador adjunto T^* es el único elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dado por la condición $\langle Tu, u' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle u, T^* u' \rangle_{\mathcal{H}}$.
- ◇ Dado un operador acotado $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definimos
 - ▶ T es auto-adjunto (o Hermitiano) si y sólo si $T = T^*$,

- ◇ Para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el operador adjunto T^* es el único elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dado por la condición $\langle Tu, u' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle u, T^* u' \rangle_{\mathcal{H}}$.
- ◇ Dado un operador acotado $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definimos
 - ▶ T es auto-adjunto (o Hermitiano) si y sólo si $T = T^*$,
 - ▶ T es unitario si y sólo si $TT^* = I = T^*T$,

- ◇ Para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ el operador adjunto T^* es el único elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dado por la condición $\langle Tu, u' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle u, T^* u' \rangle_{\mathcal{H}}$.
- ◇ Dado un operador acotado $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definimos
 - ▶ T es auto-adjunto (o Hermitiano) si y sólo si $T = T^*$,
 - ▶ T es unitario si y sólo si $TT^* = I = T^*T$,
 - ▶ T es normal si y sólo si $TT^* = T^*T$.

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.
 - ▶ Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces existe la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por las condiciones

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.
 - ▶ Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces existe la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por las condiciones
 - ⊙ $\pi_{\mathcal{K}}$ es operador lineal acotado,

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.
 - ▶ Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces existe la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por las condiciones
 - $\pi_{\mathcal{K}}$ es operador lineal acotado,
 - para todo $u \in \mathcal{H}$, $\pi_{\mathcal{K}}(u)$ es el elemento de $\mathcal{K}$ más cercano a u .

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.
 - ▶ Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces existe la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por las condiciones
 - ⊙ $\pi_{\mathcal{K}}$ es operador lineal acotado,
 - ⊙ para todo $u \in \mathcal{H}$, $\pi_{\mathcal{K}}(u)$ es el elemento de $\mathcal{K}$ más cercano a u .
 - ▶ Las proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados son precisamente los elementos $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que cumplen

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.
 - ▶ Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces existe la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por las condiciones
 - $\pi_{\mathcal{K}}$ es operador lineal acotado,
 - para todo $u \in \mathcal{H}$, $\pi_{\mathcal{K}}(u)$ es el elemento de $\mathcal{K}$ más cercano a u .
 - ▶ Las proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados son precisamente los elementos $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que cumplen
 - $E^* = E$,

- ◇ Los espacios de Hilbert presentan algunas propiedades geométricas y topológicas interesantes.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert dado.
 - ▶ La bola unidad $\{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ es cerrado y acotado, pero es compacto si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita. Ejemplo: considerar bases unitarias.
 - ▶ Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, entonces existen subespacios V de $\mathcal{H}$ que no son cerrados y por tanto no son de Hilbert.
 - ▶ Si $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado, entonces existe la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por las condiciones
 - ◉ $\pi_{\mathcal{K}}$ es operador lineal acotado,
 - ◉ para todo $u \in \mathcal{H}$, $\pi_{\mathcal{K}}(u)$ es el elemento de $\mathcal{K}$ más cercano a u .
 - ▶ Las proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados son precisamente los elementos $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que cumplen
 - ◉ $E^* = E$,
 - ◉ $E^2 = E$.

1 Espacios de Hilbert

2 Espacios L^2

- ◇ Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, la integral de Riemann de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$

- ◇ Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, la integral de Riemann de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$
 - ▶ se construye particionando U mediante rectángulos,

- ◇ Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, la integral de Riemann de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$
 - ▶ se construye particionando U mediante rectángulos,
 - ▶ utiliza particiones de Riemann,

- ◇ Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, la integral de Riemann de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$
 - ▶ se construye particionando U mediante rectángulos,
 - ▶ utiliza particiones de Riemann,
 - ▶ requiere que f sea acotada y continua, o muy “cercana” a ser continua.

- ◇ Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, la integral de Riemann de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$
 - ▶ se construye particionando U mediante rectángulos,
 - ▶ utiliza particiones de Riemann,
 - ▶ requiere que f sea acotada y continua, o muy “cercana” a ser continua.
- ◇ La integral de Riemann define un producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} dx,$$

en $C_b(U)$, las funciones acotadas y continuas $U \rightarrow \mathbb{C}$.

- ◇ Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, la integral de Riemann de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$
 - ▶ se construye particionando U mediante rectángulos,
 - ▶ utiliza particiones de Riemann,
 - ▶ requiere que f sea acotada y continua, o muy “cercana” a ser continua.
- ◇ La integral de Riemann define un producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} dx,$$

en $C_b(U)$, las funciones acotadas y continuas $U \rightarrow \mathbb{C}$.

- ◇ Pero no define un espacio de Hilbert.

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .
 - ▶ Para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, la medida exterior de E se define por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(R_j) : E \subset \bigcup_{j \in J} R_j \right\}$$

con R_j rectángulos abiertos y J contable.

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .
 - ▶ Para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, la medida exterior de E se define por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(R_j) : E \subset \bigcup_{j \in J} R_j \right\}$$

con R_j rectángulos abiertos y J contable.

- ▶ Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice (Lebesgue) medible si existen A y B tales que

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .
 - ▶ Para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, la medida exterior de E se define por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(R_j) : E \subset \bigcup_{j \in J} R_j \right\}$$

con R_j rectángulos abiertos y J contable.

- ▶ Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice (Lebesgue) medible si existen A y B tales que
 - ⊙ $A \subset E \subset B$,

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .
 - ▶ Para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, la medida exterior de E se define por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(R_j) : E \subset \bigcup_{j \in J} R_j \right\}$$

con R_j rectángulos abiertos y J contable.

- ▶ Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice (Lebesgue) medible si existen A y B tales que
 - ◉ $A \subset E \subset B$,
 - ◉ A es unión contable de conjuntos compactos y B es intersección contable de conjuntos abiertos,

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .
 - ▶ Para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, la medida exterior de E se define por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(R_j) : E \subset \bigcup_{j \in J} R_j \right\}$$

con R_j rectángulos abiertos y J contable.

- ▶ Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice (Lebesgue) medible si existen A y B tales que
 - ◉ $A \subset E \subset B$,
 - ◉ A es unión contable de conjuntos compactos y B es intersección contable de conjuntos abiertos,
 - ◉ $m^*(E \setminus A) = 0 = m^*(B \setminus E)$.

- ◇ La medida de Lebesgue se puede construir como sigue.
 - ▶ Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, es decir, un producto de intervalos: $R = I_1 \times \cdots \times I_n$.
 - ▶ La medida de R : $m(R) = \ell_1 \cdots \ell_n$, con ℓ_j es la longitud de I_j .
 - ▶ Para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, la medida exterior de E se define por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} m(R_j) : E \subset \bigcup_{j \in J} R_j \right\}$$

con R_j rectángulos abiertos y J contable.

- ▶ Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice (Lebesgue) medible si existen A y B tales que
 - ◉ $A \subset E \subset B$,
 - ◉ A es unión contable de conjuntos compactos y B es intersección contable de conjuntos abiertos,
 - ◉ $m^*(E \setminus A) = 0 = m^*(B \setminus E)$.
- ▶ Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible, entonces su medida se define por

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf \{ m^*(U) : U \supset E, U \text{ abierto} \} \\ &= \sup \{ m^*(K) : K \subset E, K \text{ compacto} \}. \end{aligned}$$

- ◇ Integramos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

- ◇ Integramos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.
- ◇ f es medible si $f^{-1}(V)$ es medible para todo $V \subset \mathbb{C}$ abierto.

- ◇ Integramos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.
- ◇ f es medible si $f^{-1}(V)$ es medible para todo $V \subset \mathbb{C}$ abierto.
- ◇ Dada $f : U \rightarrow [0, \infty)$ medible realizamos las siguientes construcciones.

- ◇ Integramos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.
- ◇ f es medible si $f^{-1}(V)$ es medible para todo $V \subset \mathbb{C}$ abierto.
- ◇ Dada $f : U \rightarrow [0, \infty)$ medible realizamos las siguientes construcciones.
 - Particionamos el contradominio de f

$$[0, +\infty) = [2^n, +\infty) \cup \bigcup_{k=0}^{2^{2^n}-1} [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}).$$

- ◇ Integramos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.
- ◇ f es medible si $f^{-1}(V)$ es medible para todo $V \subset \mathbb{C}$ abierto.
- ◇ Dada $f : U \rightarrow [0, \infty)$ medible realizamos las siguientes construcciones.

- ▶ Particionamos el contradominio de f

$$[0, +\infty) = [2^n, +\infty) \cup \bigcup_{k=0}^{2^{2^n}-1} [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}).$$

- ▶ Consideramos las “sumas de Lebesgue” de f

$$\begin{aligned} L_n(f) = \sum_{k=0}^{2^{2^n}-1} k2^{-n} m\left(f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}))\right) \\ + 2^n m\left(f^{-1}([2^n, +\infty))\right) \end{aligned}$$

- ◊ Integramos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.
- ◊ f es medible si $f^{-1}(V)$ es medible para todo $V \subset \mathbb{C}$ abierto.
- ◊ Dada $f : U \rightarrow [0, \infty)$ medible realizamos las siguientes construcciones.

- ▶ Particionamos el contradominio de f

$$[0, +\infty) = [2^n, +\infty) \cup \bigcup_{k=0}^{2^{2^n}-1} [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}).$$

- ▶ Consideramos las “sumas de Lebesgue” de f

$$\begin{aligned} L_n(f) = \sum_{k=0}^{2^{2^n}-1} k2^{-n} m\left(f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}))\right) \\ + 2^n m\left(f^{-1}([2^n, +\infty))\right) \end{aligned}$$

- ◊ La integral de f se define por

$$\int_U f(x) dm(x) = \int_U f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(f).$$

- ♦ Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ medible. En particular, $|f| : U \rightarrow [0, +\infty)$ es medible.

- ◇ Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ medible. En particular, $|f| : U \rightarrow [0, +\infty)$ es medible.
 - Decimos que f es integrable si $\int_U |f(x)| \, d\mathbf{m}(x) < +\infty$.

- ◇ Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ medible. En particular, $|f| : U \rightarrow [0, +\infty)$ es medible.

- ▶ Decimos que f es integrable si $\int_U |f(x)| \, d\mu(x) < +\infty$.
- ▶ Escribimos $f = (\operatorname{Re}(f)^+ - \operatorname{Re}(f)^-) + i(\operatorname{Im}(f)^+ - \operatorname{Im}(f)^-)$.
Entonces, f es integrable si y sólo si $\operatorname{Re}(f)^+$, $\operatorname{Re}(f)^-$, $\operatorname{Im}(f)^+$, $\operatorname{Im}(f)^-$ son integrables.

- ◇ Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ medible. En particular, $|f| : U \rightarrow [0, +\infty)$ es medible.

- ▶ Decimos que f es integrable si $\int_U |f(x)| \, d\mathbf{m}(x) < +\infty$.
- ▶ Escribimos $f = (\operatorname{Re}(f)^+ - \operatorname{Re}(f)^-) + i(\operatorname{Im}(f)^+ - \operatorname{Im}(f)^-)$. Entonces, f es integrable si y sólo si $\operatorname{Re}(f)^+$, $\operatorname{Re}(f)^-$, $\operatorname{Im}(f)^+$, $\operatorname{Im}(f)^-$ son integrables.
- ▶ En tal caso, definimos

$$\begin{aligned} \int_U f \, d\mathbf{m} &= \int_U \operatorname{Re}(f)^+ \, d\mathbf{m} - \int_U \operatorname{Re}(f)^- \, d\mathbf{m} \\ &\quad + i \int_U \operatorname{Im}(f)^+ \, d\mathbf{m} - i \int_U \operatorname{Im}(f)^- \, d\mathbf{m}. \end{aligned}$$

- ◇ El espacio de funciones integrables $U \rightarrow \mathbb{C}$ se denota $L^1(U)$.

- ◇ El espacio de funciones integrables $U \rightarrow \mathbb{C}$ se denota $L^1(U)$.
- ◇ $L^1(U)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \int_U |f| \, dm.$$

- ◇ El espacio de funciones integrables $U \rightarrow \mathbb{C}$ se denota $L^1(U)$.
- ◇ $L^1(U)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \int_U |f| \, dm.$$

- ◇ Denotamos con $L^2(U)$ el espacio de funciones medibles $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_2^2 = \int_U |f(x)|^2 \, dm(x) < +\infty.$$

- ◇ El espacio de funciones integrables $U \rightarrow \mathbb{C}$ se denota $L^1(U)$.
- ◇ $L^1(U)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \int_U |f| \, dm.$$

- ◇ Denotamos con $L^2(U)$ el espacio de funciones medibles $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_2^2 = \int_U |f(x)|^2 \, dm(x) < +\infty.$$

- ◇ Para cualesquiera $f, g \in L^2(U)$ se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_U |f(x)g(x)| \, dm(x) \leq \left(\int_U |f(x)|^2 \, dm(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U |g(x)|^2 \, dm(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.
 - ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.

◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.
- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, d\mathbf{m}(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.

- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Más aún, los teoremas de convergencia de integración de Lebesgue permiten probar que $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert.

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.

- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, d\mathbf{m}(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Más aún, los teoremas de convergencia de integración de Lebesgue permiten probar que $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert.
- ◇ Algunos de los principales teoremas son

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.
- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, d\mathbf{m}(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Más aún, los teoremas de convergencia de integración de Lebesgue permiten probar que $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert.
- ◇ Algunos de los principales teoremas son
 - ▶ Teorema de Convergencia Monótona,

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.
- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, d\mathbf{m}(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Más aún, los teoremas de convergencia de integración de Lebesgue permiten probar que $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert.
- ◇ Algunos de los principales teoremas son
 - ▶ Teorema de Convergencia Monótona,
 - ▶ Teorema de Convergencia Dominada,

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.
- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, dm(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Más aún, los teoremas de convergencia de integración de Lebesgue permiten probar que $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert.
- ◇ Algunos de los principales teoremas son
 - ▶ Teorema de Convergencia Monótona,
 - ▶ Teorema de Convergencia Dominada,
 - ▶ convergencia L^2 de una sucesión implica convergencia puntual (en casi todo punto) de una subsucesión,

- ◇ Partiendo de lo anterior se puede probar lo siguiente.

- ▶ $L^2(U)$ es un espacio vectorial complejo.
- ▶ La expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} \, dm(x),$$

define un producto interno en $L^2(U)$.

- ◇ Más aún, los teoremas de convergencia de integración de Lebesgue permiten probar que $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert.
- ◇ Algunos de los principales teoremas son
 - ▶ Teorema de Convergencia Monótona,
 - ▶ Teorema de Convergencia Dominada,
 - ▶ convergencia L^2 de una sucesión implica convergencia puntual (en casi todo punto) de una subsucesión,
 - ▶ convergencia uniforme de una sucesión implica convergencia L^1 cuando $m(U) < +\infty$.

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .
- ◇ Existen los siguientes diferentes tipos de convergencia.

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .
- ◇ Existen los siguientes diferentes tipos de convergencia.
 - ▶ L^2 .

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .
- ◇ Existen los siguientes diferentes tipos de convergencia.
 - ▶ L^2 .
 - ▶ Puntual.

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .
- ◇ Existen los siguientes diferentes tipos de convergencia.
 - ▶ L^2 .
 - ▶ Puntual.
 - ▶ Uniforme.

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .
- ◇ Existen los siguientes diferentes tipos de convergencia.
 - ▶ L^2 .
 - ▶ Puntual.
 - ▶ Uniforme.
- ◇ En todos los espacios anteriores, estas formas de convergencia no guardan relación entre sí a menos que se impongan hipótesis adicionales.

- ◇ Los siguientes son subespacios densos en $L^2(U)$.
 - ▶ Las funciones Riemann integrables en U .
 - ▶ $C_b(U)$ las funciones continuas acotadas en U .
 - ▶ $C_b^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ acotadas en U .
 - ▶ $C_c^\infty(U)$ las funciones de clase C^∞ con soporte compacto en U .
- ◇ Existen los siguientes diferentes tipos de convergencia.
 - ▶ L^2 .
 - ▶ Puntual.
 - ▶ Uniforme.
- ◇ En todos los espacios anteriores, estas formas de convergencia no guardan relación entre sí a menos que se impongan hipótesis adicionales.
- ◇ Veremos que las funciones holomorfas (o analíticas) tienen un comportamiento superior.