

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Funciones holomorfas

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

- 1 Una variable compleja
- 2 Varias variables complejas

- 1 Una variable compleja
- 2 Varias variables complejas

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio (abierto conexo).

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio (abierto conexo).
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa si su derivada compleja

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe para todo $z \in U$.

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio (abierto conexo).
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa si su derivada compleja

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe para todo $z \in U$.

- ◇ Definimos los operadores de Wirtinger por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio (abierto conexo).
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa si su derivada compleja

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe para todo $z \in U$.

- ◇ Definimos los operadores de Wirtinger por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0,$$

y en este caso

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z),$$

para todo $z \in U$.

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces en todo $z_0 \in U$ admite una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

convergente de manera uniforme en subconjuntos compactos de $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < d(z_0, bU)\}$.

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces en todo $z_0 \in U$ admite una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

convergente de manera uniforme en subconjuntos compactos de $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < d(z_0, bU)\}$.

- ◇ En este caso, tenemos $a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$, para todo $j \geq 0$.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy establece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

para todo $z \in D(z_0; r)$, donde $z_0 \in U$ y $0 < r < d(z_0, bU)$.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy establece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

para todo $z \in D(z_0; r)$, donde $z_0 \in U$ y $0 < r < d(z_0, bU)$.

- ◇ Notación: $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy establece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

para todo $z \in D(z_0; r)$, donde $z_0 \in U$ y $0 < r < d(z_0, bU)$.

- ◇ Notación: $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.
- ◇ Más generalmente:

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{j+1}}$$

para todo $z \in D(z_0; r)$.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy establece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

para todo $z \in D(z_0; r)$, donde $z_0 \in U$ y $0 < r < d(z_0, bU)$.

- ◇ Notación: $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.
- ◇ Más generalmente:

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{j+1}}$$

para todo $z \in D(z_0; r)$.

- ◇ Los valores de una función holomorfa en $D(z_0; r) \subset U$ están completamente determinados por sus valores en $bD(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy permite concluir el siguiente resultado.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy permite concluir el siguiente resultado.
 - ▶ Sea $(f_j)_{j=1}^{+\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas $U \rightarrow \mathbb{C}$. Si $(f_j)_{j=1}^{+\infty}$ converge a $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de manera uniforme en subconjuntos compactos de U , entonces f es holomorfa. Más aún, $(f'_j)_j$ converge a f' de manera uniforme en subconjuntos compactos de U .

- ◇ La fórmula integral de Cauchy permite concluir el siguiente resultado.

- ▶ Sea $(f_j)_{j=1}^{+\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas $U \rightarrow \mathbb{C}$.
Si $(f_j)_{j=1}^{+\infty}$ converge a $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de manera uniforme en subconjuntos compactos de U , entonces f es holomorfa.
Más aún, $(f'_j)_j$ converge a f' de manera uniforme en subconjuntos compactos de U .

- ◇ La demostración: escribir la fórmula integral de Cauchy para cada f_j

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f_j(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

y tomar el límite en j usando la convergencia uniforme en subconjuntos compactos.

- ◇ El análisis complejo en una variable presenta algunos resultados interesantes. Recordamos que U es conexo.

- ◇ El análisis complejo en una variable presenta algunos resultados interesantes. Recordamos que U es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante cero, entonces el conjunto $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es discreto en U .
En particular, los ceros de f son aislados.

- ◇ El análisis complejo en una variable presenta algunos resultados interesantes. Recordamos que U es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante cero, entonces el conjunto $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es discreto en U .
En particular, los ceros de f son aislados.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante, entonces f es un mapeo abierto. Si además f es inyectiva, entonces su inversa es también holomorfa.

- ◇ El análisis complejo en una variable presenta algunos resultados interesantes. Recordamos que U es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante cero, entonces el conjunto $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es discreto en U .
En particular, los ceros de f son aislados.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante, entonces f es un mapeo abierto. Si además f es inyectiva, entonces su inversa es también holomorfa.
 - ▶ Existen funciones con singularidades aisladas; e.g. considerar $1/f$ con f holomorfa.

- ◇ El análisis complejo en una variable presenta algunos resultados interesantes. Recordamos que U es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante cero, entonces el conjunto $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es discreto en U .
En particular, los ceros de f son aislados.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante, entonces f es un mapeo abierto. Si además f es inyectiva, entonces su inversa es también holomorfa.
 - ▶ Existen funciones con singularidades aisladas; e.g. considerar $1/f$ con f holomorfa.
 - ▶ Para todo dominio U existe una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que f no se puede extender localmente de manera holomorfa a través de ningún punto de ∂U .

- ◇ El análisis complejo en una variable presenta algunos resultados interesantes. Recordamos que U es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante cero, entonces el conjunto $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es discreto en U .
En particular, los ceros de f son aislados.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no es constante, entonces f es un mapeo abierto. Si además f es inyectiva, entonces su inversa es también holomorfa.
 - ▶ Existen funciones con singularidades aisladas; e.g. considerar $1/f$ con f holomorfa.
 - ▶ Para todo dominio U existe una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que f no se puede extender localmente de manera holomorfa a través de ningún punto de ∂U .
 - ▶ Teorema del mapeo de Riemann: Si U es un dominio simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$, entonces existe una biyección holomorfa $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D} = D(0; 1)$.

- 1 Una variable compleja
- 2 Varias variables complejas

- ◇ Consideramos ahora $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio (abierto y conexo) n -dimensional complejo.

- ◇ Consideramos ahora $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio (abierto y conexo) n -dimensional complejo.
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa cuando

- ◇ Consideramos ahora $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio (abierto y conexo) n -dimensional complejo.
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa cuando
 - ▶ f es continua,

- ◇ Consideramos ahora $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio (abierto y conexo) n -dimensional complejo.
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa cuando
 - ▶ f es continua,
 - ▶ f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada variable compleja

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0,$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

- ◇ Consideramos ahora $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio (abierto y conexo) n -dimensional complejo.
- ◇ Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa cuando
 - ▶ f es continua,
 - ▶ f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada variable compleja

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0,$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

- ◇ Los operadores de Wirtinger son ahora:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

con $j = 1, \dots, n$.

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces podemos aplicar sucesivamente la fórmula integral de Cauchy para obtener

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n) d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{|\zeta_1 - a_1| = r_1 \\ |\zeta_2 - a_2| = r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\substack{|\zeta_j - a_j| = r_j \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}. \end{aligned}$$

Esto se cumple cuando $z \in D(a_1; r_1) \times \cdots \times D(a_n; r_n) \subset U$.

- ◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.

- ◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.
 - ▶ Polidisco: $P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}$,
donde $a \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)$.

- ◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.
 - ▶ Polidisco: $P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}$,
donde $a \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)$.
 - ▶ Frontera distinguida del polidisco:
 $b_0 P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$.

◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.

- ▶ Polidisco: $P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}$,
donde $a \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)$.
- ▶ Frontera distinguida del polidisco:
 $b_0 P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$.
- ▶ Monomios: $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$, donde $z \in \mathbb{C}^n$ y
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

- ◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.
 - ▶ Polidisco: $P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}$, donde $a \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)$.
 - ▶ Frontera distinguida del polidisco:
 $b_0 P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$.
 - ▶ Monomios: $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$, donde $z \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
 - ▶ Factoriales: $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$, donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

- ◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.
- ▶ Polidisco: $P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}$,
donde $a \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)$.
- ▶ Frontera distinguida del polidisco:
 $b_0 P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$.
- ▶ Monomios: $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$, donde $z \in \mathbb{C}^n$ y
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- ▶ Factoriales: $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$, donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- ▶ Integración sobre producto de curvas: $d\zeta = d\zeta_1 \cdot \dots \cdot d\zeta_n$.

◇ Introducimos la siguiente notación para simplificar los cálculos.

- ▶ Polidisco: $P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}$,
donde $a \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)$.
- ▶ Frontera distinguida del polidisco:
 $b_0 P(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$.
- ▶ Monomios: $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$, donde $z \in \mathbb{C}^n$ y
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- ▶ Factoriales: $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$, donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- ▶ Integración sobre producto de curvas: $d\zeta = d\zeta_1 \cdot \dots \cdot d\zeta_n$.
- ▶ Derivadas parciales de orden superior: $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}$.

- ◇ La fórmula integral de Cauchy es

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 P(a;r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{(1,\dots,1)}}.$$

- ◇ La fórmula integral de Cauchy es

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 P(a;r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{(1,\dots,1)}}.$$

- ◇ Más generalmente, tenemos

$$D^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 P(a;r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{\alpha+1}}.$$

- ◊ La fórmula integral de Cauchy es

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 P(a;r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{(1,\dots,1)}}.$$

- ◊ Más generalmente, tenemos

$$D^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 P(a;r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{\alpha+1}}.$$

- ◊ En particular, toda función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es clase C^∞ .

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $P(a; r) \subset U$, entonces f admite una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha} (z - a)^{\alpha},$$

que converge de manera uniforme en subconjuntos compactos de $P(a; r)$.

- Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $P(a; r) \subset U$, entonces f admite una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha} (z - a)^{\alpha},$$

que converge de manera uniforme en subconjuntos compactos de $P(a; r)$.

- En este caso, tenemos

$$c_{\alpha} = \frac{D^{\alpha} f(a)}{\alpha!}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

- ◇ Cuando $n \geq 2$, se presentan diferencias importantes en el análisis complejo. Recordamos que $U \subset \mathbb{C}^n$ es conexo.

- ◇ Cuando $n \geq 2$, se presentan diferencias importantes en el análisis complejo. Recordamos que $U \subset \mathbb{C}^n$ es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante cero, entonces el conjunto es $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es localmente de dimensión $n - 1$ (con ramificaciones).
En particular, f no posee ceros aislados.

- ◇ Cuando $n \geq 2$, se presentan diferencias importantes en el análisis complejo. Recordamos que $U \subset \mathbb{C}^n$ es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante cero, entonces el conjunto es $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es localmente de dimensión $n - 1$ (con ramificaciones).
En particular, f no posee ceros aislados.
 - ▶ Si $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces z_0 es una singularidad removible: f admite una extensión holomorfa a U .

- ◇ Cuando $n \geq 2$, se presentan diferencias importantes en el análisis complejo. Recordamos que $U \subset \mathbb{C}^n$ es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante cero, entonces el conjunto es $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es localmente de dimensión $n - 1$ (con ramificaciones).
En particular, f no posee ceros aislados.
 - ▶ Si $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces z_0 es una singularidad removible: f admite una extensión holomorfa a U .
 - ▶ Los polos de funciones holomorfas en una variable complejas se generalizan a conjuntos analíticos de dimensión $n - 1$.

- ◇ Cuando $n \geq 2$, se presentan diferencias importantes en el análisis complejo. Recordamos que $U \subset \mathbb{C}^n$ es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante cero, entonces el conjunto es $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es localmente de dimensión $n - 1$ (con ramificaciones).
En particular, f no posee ceros aislados.
 - ▶ Si $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces z_0 es una singularidad removible: f admite una extensión holomorfa a U .
 - ▶ Los polos de funciones holomorfas en una variable complejas se generalizan a conjuntos analíticos de dimensión $n - 1$.
 - ▶ Existen dominios (conexos) $U \subsetneq V \subset \mathbb{C}^n$ tal que toda función holomorfa en U admite una extensión holomorfa a V .

- ◇ Cuando $n \geq 2$, se presentan diferencias importantes en el análisis complejo. Recordamos que $U \subset \mathbb{C}^n$ es conexo.
 - ▶ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante cero, entonces el conjunto es $\{z \in U : f(z) = 0\}$ es localmente de dimensión $n - 1$ (con ramificaciones).
En particular, f no posee ceros aislados.
 - ▶ Si $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces z_0 es una singularidad removible: f admite una extensión holomorfa a U .
 - ▶ Los polos de funciones holomorfas en una variable complejas se generalizan a conjuntos analíticos de dimensión $n - 1$.
 - ▶ Existen dominios (conexos) $U \subsetneq V \subset \mathbb{C}^n$ tal que toda función holomorfa en U admite una extensión holomorfa a V .
 - ▶ No existe un Teorema del Mapeo de Riemann.
Denotemos $\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. No existen mapeos holomorfos biyectivos $F : \mathbb{B}_n \rightarrow P(0; 1) = \mathbb{D}^n$.