

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Espacios de Bergman

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.
- ◇ En particular, dado $x_0 \in U$, el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ carece de sentido.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.
- ◇ En particular, dado $x_0 \in U$, el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ carece de sentido.
- ◇ Si restringimos nuestras funciones a $C_b(U)$, entonces el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ tiene sentido y satisface las siguientes propiedades.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.
- ◇ En particular, dado $x_0 \in U$, el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ carece de sentido.
- ◇ Si restringimos nuestras funciones a $C_b(U)$, entonces el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ tiene sentido y satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ Si $(f_j)_j \subset C_b(U)$ es una sucesión que converge a f (puntual o uniformemente), entonces $(f_j(x_0))_j$ converge a $f(x_0)$; es decir, el funcional lineal es continuo para estos tipos de convergencia.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.
- ◇ En particular, dado $x_0 \in U$, el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ carece de sentido.
- ◇ Si restringimos nuestras funciones a $C_b(U)$, entonces el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ tiene sentido y satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ Si $(f_j)_j \subset C_b(U)$ es una sucesión que converge a f (puntual o uniformemente), entonces $(f_j(x_0))_j$ converge a $f(x_0)$; es decir, el funcional lineal es continuo para estos tipos de convergencia.
 - ▶ Las topologías asociadas a convergencia puntual y uniforme no definen espacios de Hilbert.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.
- ◇ En particular, dado $x_0 \in U$, el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ carece de sentido.
- ◇ Si restringimos nuestras funciones a $C_b(U)$, entonces el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ tiene sentido y satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ Si $(f_j)_j \subset C_b(U)$ es una sucesión que converge a f (puntual o uniformemente), entonces $(f_j(x_0))_j$ converge a $f(x_0)$; es decir, el funcional lineal es continuo para estos tipos de convergencia.
 - ▶ Las topologías asociadas a convergencia puntual y uniforme no definen espacios de Hilbert.
 - ▶ Si $(f_j)_j \subset C_b(U)$ converge a $f \in C_b(U)$ en la norma L^2 , no necesariamente $(f_j(x_0))_j$ converge a $f(x_0)$.

- ◇ Consideramos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.
- ◇ Las funciones que pertenecen a $L^2(U)$ están definidas en casi todo punto, es decir, salvo por cambios en un conjunto de medida cero.
- ◇ En particular, dado $x_0 \in U$, el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ carece de sentido.
- ◇ Si restringimos nuestras funciones a $C_b(U)$, entonces el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ tiene sentido y satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ Si $(f_j)_j \subset C_b(U)$ es una sucesión que converge a f (puntual o uniformemente), entonces $(f_j(x_0))_j$ converge a $f(x_0)$; es decir, el funcional lineal es continuo para estos tipos de convergencia.
 - ▶ Las topologías asociadas a convergencia puntual y uniforme no definen espacios de Hilbert.
 - ▶ Si $(f_j)_j \subset C_b(U)$ converge a $f \in C_b(U)$ en la norma L^2 , no necesariamente $(f_j(x_0))_j$ converge a $f(x_0)$.
- ◇ Conclusión: el funcional lineal $f \mapsto f(x_0)$ no es acotado en la topología de Hilbert en $L^2(U)$ ni tampoco al restringir a funciones continuas.

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in U$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$.

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in U$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$.
- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces para todo $0 < r < r_0$ podemos escribir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in U$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$.
- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces para todo $0 < r < r_0$ podemos escribir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

- ◇ Se integra sobre la curva $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$).
Esto nos permite estimar para todo $0 < r < r_0$

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r e^{i\theta} |d\theta|}{|re^{i\theta}|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in U$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$.
- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces para todo $0 < r < r_0$ podemos escribir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

- ◇ Se integra sobre la curva $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$).
Esto nos permite estimar para todo $0 < r < r_0$

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r e^{i\theta}}{|re^{i\theta}|} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

- ◇ Al multiplicar por r e integrar sobre $(0, r_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(z_0)| \frac{r_0^2}{2} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0; r_0)} |f(\zeta)| dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{D(z_0; r_0)} \|1\|_1 \end{aligned}$$

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$, entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f|_{D(z_0; r_0)}\|_1}{\pi r_0^2}.$$

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$, entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f|_{D(z_0; r_0)}\|_1}{\pi r_0^2}.$$

- ◇ La norma L^1 de f en discos alrededor de z_0 acota el valor de f en z_0 , con una constante que no depende de f .

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$, entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f\|_{D(z_0; r_0)}^2}{\pi r_0^2}.$$

- ◇ La norma L^1 de f en discos alrededor de z_0 acota el valor de f en z_0 , con una constante que no depende de f .
- ◇ Cauchy-Schwarz permite acotar por la norma L^2 .

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$, entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f|_{D(z_0; r_0)}\|_1}{\pi r_0^2}.$$

- ◇ La norma L^1 de f en discos alrededor de z_0 acota el valor de f en z_0 , con una constante que no depende de f .
- ◇ Cauchy-Schwarz permite acotar por la norma L^2 .
- ◇ Estimamos

$$\begin{aligned} \int_{D(z_0; r_0)} |f(\zeta)| \, d\mathbf{m}(\zeta) &\leq \|f|_{D(z_0; r_0)}\|_2 \cdot \|\chi_{D(z_0; r_0)}\|_2 \\ &= \sqrt{\pi} r_0 \|f|_{D(z_0; r_0)}\|_2. \end{aligned}$$

- ◇ Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset U$, entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f\|_{D(z_0; r_0)}^1}{\pi r_0^2}.$$

- ◇ La norma L^1 de f en discos alrededor de z_0 acota el valor de f en z_0 , con una constante que no depende de f .
- ◇ Cauchy-Schwarz permite acotar por la norma L^2 .
- ◇ Estimamos

$$\begin{aligned} \int_{D(z_0; r_0)} |f(\zeta)| \, d\mathbf{m}(\zeta) &\leq \|f\|_{D(z_0; r_0)}^2 \cdot \|\chi_{D(z_0; r_0)}\|_2 \\ &= \sqrt{\pi} r_0 \|f\|_{D(z_0; r_0)}^2. \end{aligned}$$

- ◇ Concluimos ahora que

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f\|_{D(z_0; r_0)}^2}{\sqrt{\pi} r_0}.$$

Es decir, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ muestra continuidad L^2 en funciones holomorfas.

- ◇ El espacio de Bergman asociado a un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es el espacio

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ El espacio de Bergman asociado a un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es el espacio

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ Hemos probado que para todo $z_0 \in D$ existe $C_{z_0} > 0$ tal que

$$|f(z_0)| \leq C_{z_0} \|f\|_{D(z_0, r_0)} \leq C_{z_0} \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ El espacio de Bergman asociado a un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es el espacio

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ Hemos probado que para todo $z_0 \in D$ existe $C_{z_0} > 0$ tal que

$$|f(z_0)| \leq C_{z_0} \|f\|_{D(z_0, r_0)} \leq C_{z_0} \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En particular tenemos

- ◇ El espacio de Bergman asociado a un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es el espacio

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ Hemos probado que para todo $z_0 \in D$ existe $C_{z_0} > 0$ tal que

$$|f(z_0)| \leq C_{z_0} \|f\|_{D(z_0, r_0)} \leq C_{z_0} \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En particular tenemos
 - el funcional lineal $z_0 \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$ para la topología heredada de $L^2(D)$,

- ◇ El espacio de Bergman asociado a un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es el espacio

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ Hemos probado que para todo $z_0 \in D$ existe $C_{z_0} > 0$ tal que

$$|f(z_0)| \leq C_{z_0} \|f\|_{D(z_0, r_0)} \leq C_{z_0} \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En particular tenemos
 - ▶ el funcional lineal $z_0 \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$ para la topología heredada de $L^2(D)$,
 - ▶ si $(f_j)_j \subset \mathcal{A}^2(D)$ converge en la norma L^2 a f , entonces la convergencia a f es también puntual.

- ◇ El espacio de Bergman asociado a un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es el espacio

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ Hemos probado que para todo $z_0 \in D$ existe $C_{z_0} > 0$ tal que

$$|f(z_0)| \leq C_{z_0} \|f|_{D(z_0, r_0)}\|_2 \leq C_{z_0} \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En particular tenemos
 - ▶ el funcional lineal $z_0 \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$ para la topología heredada de $L^2(D)$,
 - ▶ si $(f_j)_j \subset \mathcal{A}^2(D)$ converge en la norma L^2 a f , entonces la convergencia a f es también puntual.
- ◇ Pregunta: ¿La función límite f pertenece a $\mathcal{A}^2(D)$?
¿El subespacio $\mathcal{A}^2(D)$ es cerrado en $L^2(D)$?

- ◇ Afirmación: Si $z_0 \in D$ y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$, entonces

$$|f(z)| \leq \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \|f\|_2,$$

para todo $z \in D(z_0; r_0/2)$ y $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ Afirmación: Si $z_0 \in D$ y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$, entonces

$$|f(z)| \leq \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \|f\|_2,$$

para todo $z \in D(z_0; r_0/2)$ y $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ Concluimos: si $(f_j)_j$ converge a $f \in L^2(D)$ en la norma L^2 , entonces la convergencia es uniforme en una vecindad de cada punto.

- ◇ Afirmación: Si $z_0 \in D$ y $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$, entonces

$$|f(z)| \leq \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \|f\|_2,$$

para todo $z \in D(z_0; r_0/2)$ y $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ Concluimos: si $(f_j)_j$ converge a $f \in L^2(D)$ en la norma L^2 , entonces la convergencia es uniforme en una vecindad de cada punto.
- ◇ El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(D)$ es un subespacio cerrado de $L^2(D)$. Por tanto, $\mathcal{A}^2(D)$ es un espacio de Hilbert.

- ◇ Sean $z_0 \in D$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$. Estimamos como sigue para cualquier $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ Sean $z_0 \in D$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$. Estimamos como sigue para cualquier $f \in \mathcal{A}^2(D)$.
 - Si $|\zeta - z_0| = r < r_0$ y $|z - z_0| < r_0/2$, entonces

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{r}{2}$$

- ◇ Sean $z_0 \in D$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$. Estimamos como sigue para cualquier $f \in \mathcal{A}^2(D)$.
- Si $|\zeta - z_0| = r < r_0$ y $|z - z_0| < r_0/2$, entonces

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{r}{2}$$

- La formula integral de Cauchy permite obtener

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r e^{i\theta} d\theta}{|z_0 + re^{i\theta} - z|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta}{\frac{1}{2}r}$$

- ◇ Sean $z_0 \in D$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$. Estimamos como sigue para cualquier $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- Si $|\zeta - z_0| = r < r_0$ y $|z - z_0| < r_0/2$, entonces

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{r}{2}$$

- La formula integral de Cauchy permite obtener

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r e^{i\theta} d\theta}{|z_0 + re^{i\theta} - z|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta}{\frac{1}{2}r}$$

- Multiplicamos por r e integramos sobre $r_0/2 < r < r_0$ para obtener

$$|f(z)| \frac{3}{8} r_0^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}r_0}^{r_0} |f(z_0 + re^{i\theta})| r dr d\theta \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{D(z_0; r_0)} \|1\|_1.$$

- ◇ Sean $z_0 \in D$ y $r_0 > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r_0)} \subset D$. Estimamos como sigue para cualquier $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- Si $|\zeta - z_0| = r < r_0$ y $|z - z_0| < r_0/2$, entonces

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{r}{2}$$

- La formula integral de Cauchy permite obtener

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r e^{i\theta} |d\theta|}{|z_0 + re^{i\theta} - z|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta}{\frac{1}{2}r}$$

- Multiplicamos por r e integramos sobre $r_0/2 < r < r_0$ para obtener

$$|f(z)| \frac{3}{8} r_0^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}r_0}^{r_0} |f(z_0 + re^{i\theta})| r dr d\theta \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{D(z_0; r_0)} \|1\|_1.$$

- Como antes, tenemos

$$|f(z)| \leq \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$ y $z \in D$.

- ◇ Mas generalmente: si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio y $K \subset D$ es compacto, entonces existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ Mas generalmente: si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio y $K \subset D$ es compacto, entonces existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En los espacios de Bergman asociados a $D \subset \mathbb{C}$, convergencia en la norma L^2 implica convergencia uniforme en conjuntos compactos.

- ◇ Mas generalmente: si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio y $K \subset D$ es compacto, entonces existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En los espacios de Bergman asociados a $D \subset \mathbb{C}$, convergencia en la norma L^2 implica convergencia uniforme en conjuntos compactos.
- ◇ $\mathcal{A}^2(D)$ es un subespacio cerrado de $L^2(D)$.

- ◇ Sea ahora $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.

- ◇ Sea ahora $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.
 - ▶ Definimos el espacio de Bergman asociado a D como

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- ◇ Sea ahora $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.
 - Definimos el espacio de Bergman asociado a D como

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- Sobre D , la fórmula integral de Cauchy se satisface en polidiscos.

- ◇ Sea ahora $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.
 - Definimos el espacio de Bergman asociado a D como

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- Sobre D , la fórmula integral de Cauchy se satisface en polidiscos.
- ◇ Concluimos: para todo subconjunto compacto $K \subset D$ existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ Sea ahora $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.
 - Definimos el espacio de Bergman asociado a D como

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- Sobre D , la fórmula integral de Cauchy se satisface en poldiscos.
- ◇ Concluimos: para todo subconjunto compacto $K \subset D$ existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En los espacios de Bergman asociados a $D \subset \mathbb{C}^n$, convergencia en la norma L^2 implica convergencia uniforme en conjuntos compactos.

- ◇ Sea ahora $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.
 - Definimos el espacio de Bergman asociado a D como

$$\mathcal{A}^2(D) = \{f \in L^2(D) : f \text{ es holomorfa} \}.$$

- Sobre D , la fórmula integral de Cauchy se satisface en polidiscos.
- ◇ Concluimos: para todo subconjunto compacto $K \subset D$ existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En los espacios de Bergman asociados a $D \subset \mathbb{C}^n$, convergencia en la norma L^2 implica convergencia uniforme en conjuntos compactos.
- ◇ $\mathcal{A}^2(D)$ es un subespacio cerrado de $L^2(D)$.

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado
 - ▶ si $z_0 \in D$, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$,

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado
 - ▶ si $z_0 \in D$, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$,
 - ▶ el espacio $\mathcal{A}^2(D)$ es cerrado en $L^2(D)$.

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado
 - ▶ si $z_0 \in D$, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$,
 - ▶ el espacio $\mathcal{A}^2(D)$ es cerrado en $L^2(D)$.
- ◇ De lo cual concluimos las siguientes propiedades.

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado
 - ▶ si $z_0 \in D$, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$,
 - ▶ el espacio $\mathcal{A}^2(D)$ es cerrado en $L^2(D)$.
- ◇ De lo cual concluimos las siguientes propiedades.
 - ▶ Para todo $z_0 \in D$, existe $k_{z_0} \in \mathcal{A}^2(D)$ tal que

$$f(z_0) = \int_D f(w) \overline{k_{z_0}(w)} \, dm(w),$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado
 - ▶ si $z_0 \in D$, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$,
 - ▶ el espacio $\mathcal{A}^2(D)$ es cerrado en $L^2(D)$.
- ◇ De lo cual concluimos las siguientes propiedades.
 - ▶ Para todo $z_0 \in D$, existe $k_{z_0} \in \mathcal{A}^2(D)$ tal que

$$f(z_0) = \int_D f(w) \overline{k_{z_0}(w)} \, dm(w),$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ▶ Existe una proyección ortogonal $P_D : L^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$, la cual es llamada la proyección de Bergman.

- ◇ En lo sucesivo, $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio.
- ◇ Hemos probado
 - ▶ si $z_0 \in D$, el funcional lineal $f \mapsto f(z_0)$ es continuo en $\mathcal{A}^2(D)$,
 - ▶ el espacio $\mathcal{A}^2(D)$ es cerrado en $L^2(D)$.
- ◇ De lo cual concluimos las siguientes propiedades.
 - ▶ Para todo $z_0 \in D$, existe $k_{z_0} \in \mathcal{A}^2(D)$ tal que

$$f(z_0) = \int_D f(w) \overline{k_{z_0}(w)} \, dm(w),$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(D)$.

- ▶ Existe una proyección ortogonal $P_D : L^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$, la cual es llamada la proyección de Bergman.
- ◇ Ambas propiedades se pueden unificar.

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.
 - ▶ $K_D(z, w) = \overline{K_D(w, z)}$, para todo $z, w \in D$.

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.
 - ▶ $K_D(z, w) = \overline{K_D(w, z)}$, para todo $z, w \in D$.
 - ▶ $(z, w) \mapsto K_D(z, w)$ es holomorfa en z y anti-holomorfa en w .

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.
 - ▶ $K_D(z, w) = \overline{K_D(w, z)}$, para todo $z, w \in D$.
 - ▶ $(z, w) \mapsto K_D(z, w)$ es holomorfa en z y anti-holomorfa en w .
- ◇ Por tanto, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}^2(D)$ y $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(w) \overline{k_z(w)} \, dm(w) = \int_D f(w) \overline{K_D(w, z)} \, dm(w) \\ &= \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w). \end{aligned}$$

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.
 - ▶ $K_D(z, w) = \overline{K_D(w, z)}$, para todo $z, w \in D$.
 - ▶ $(z, w) \mapsto K_D(z, w)$ es holomorfa en z y anti-holomorfa en w .
- ◇ Por tanto, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}^2(D)$ y $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(w) \overline{k_z(w)} \, dm(w) = \int_D f(w) \overline{K_D(w, z)} \, dm(w) \\ &= \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w). \end{aligned}$$

- ◇ Por lo anterior, decimos

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.
 - ▶ $K_D(z, w) = \overline{K_D(w, z)}$, para todo $z, w \in D$.
 - ▶ $(z, w) \mapsto K_D(z, w)$ es holomorfa en z y anti-holomorfa en w .
- ◇ Por tanto, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}^2(D)$ y $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(w) \overline{k_z(w)} \, dm(w) = \int_D f(w) \overline{K_D(w, z)} \, dm(w) \\ &= \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w). \end{aligned}$$

- ◇ Por lo anterior, decimos
 - ▶ la expresión para $f \in \mathcal{A}^2(D)$ es una fórmula reproductora,

- ◇ El núcleo de Bergman asociado a D es la función $K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$K_D(z, w) = k_w(z).$$

- ◇ El núcleo de Bergman K_D satisface las siguientes propiedades.
 - ▶ K_D es continua.
 - ▶ $K_D(z, w) = \overline{K_D(w, z)}$, para todo $z, w \in D$.
 - ▶ $(z, w) \mapsto K_D(z, w)$ es holomorfa en z y anti-holomorfa en w .
- ◇ Por tanto, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}^2(D)$ y $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(w) \overline{k_z(w)} \, dm(w) = \int_D f(w) \overline{K_D(w, z)} \, dm(w) \\ &= \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w). \end{aligned}$$

- ◇ Por lo anterior, decimos
 - ▶ la expresión para $f \in \mathcal{A}^2(D)$ es una fórmula reproductora,
 - ▶ $\mathcal{A}^2(D)$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS) con núcleo reproductor K_D .

- ◇ Afirmación: la proyección de Bergman $P_D : L^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$ es dada por

$$(P_D(f))(z) = \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w),$$

para toda $f \in L^2(D)$ y para todo $z \in D$.

- ◇ Afirmación: la proyección de Bergman $P_D : L^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$ es dada por

$$(P_D(f))(z) = \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w),$$

para toda $f \in L^2(D)$ y para todo $z \in D$.

- ◇ Demostración:

- ◇ Afirmación: la proyección de Bergman $P_D : L^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$ es dada por

$$(P_D(f))(z) = \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w),$$

para toda $f \in L^2(D)$ y para todo $z \in D$.

- ◇ Demostración:
 - Si $f \in \mathcal{A}^2(D)$, entonces la afirmación anterior es consecuencia de $P_D(f) = f$.

- ◇ Afirmación: la proyección de Bergman $P_D : L^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$ es dada por

$$(P_D(f))(z) = \int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w),$$

para toda $f \in L^2(D)$ y para todo $z \in D$.

- ◇ Demostración:
 - ▶ Si $f \in \mathcal{A}^2(D)$, entonces la afirmación anterior es consecuencia de $P_D(f) = f$.
 - ▶ Si $f \in \mathcal{A}^2(D)^\perp$ (complemento ortogonal), entonces $P_D(f) = 0$. Por otro lado

$$\int_D f(w) K_D(z, w) \, dm(w) = \int_D f(w) \overline{k_z(w)} \, dm(w) = \langle f, k_z \rangle = 0.$$

- ◇ Una fórmula general para el núcleo de Bergman.

- ◇ Una fórmula general para el núcleo de Bergman.
 - ▶ Si $(\varphi_j)_j$ es una base unitaria para $\mathcal{A}^2(D)$, entonces

$$K_D(z, w) = \sum_j \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(w)}$$

de manera uniforme en subconjuntos compactos de $D \times D$.

- ◇ Una fórmula general para el núcleo de Bergman.
 - ▶ Si $(\varphi_j)_j$ es una base unitaria para $\mathcal{A}^2(D)$, entonces

$$K_D(z, w) = \sum_j \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(w)}$$

de manera uniforme en subconjuntos compactos de $D \times D$.

- ◇ Esto permite calcular el núcleo de Bergman en algunos casos especiales.

- ◇ Consideramos la bola unidad $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$.

- ◇ Consideramos la bola unidad $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$.
- ◇ Es posible probar que la familia de funciones $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ dada por los monomios

$$e_\alpha(z) = z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n},$$

es una base ortogonal.

- ◇ Consideramos la bola unidad $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$.
- ◇ Es posible probar que la familia de funciones $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ dada por los monomios

$$e_\alpha(z) = z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n},$$

es una base ortogonal.

- ◇ Además se cumple

$$\|e_\alpha\|_2^2 = \frac{\pi^n \alpha!}{(n + |\alpha|)!},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

- ◇ El núcleo de Bergman de la bola unidad $\mathbb{B}^n$ satisface

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{B}^n}(z, w) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{\pi^n \alpha!} z^\alpha \overline{w^\alpha} = \frac{n!}{\pi^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{n! \alpha!} z^\alpha \overline{w^\alpha} \\ &= \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)} \frac{1}{(1 - z \cdot \overline{w})^{n+1}}. \end{aligned}$$

- ◇ El núcleo de Bergman de la bola unidad $\mathbb{B}^n$ satisface

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{B}^n}(z, w) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{\pi^n \alpha!} z^\alpha \overline{w^\alpha} = \frac{n!}{\pi^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{n! \alpha!} z^\alpha \overline{w^\alpha} \\ &= \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)} \frac{1}{(1 - z \cdot \overline{w})^{n+1}}. \end{aligned}$$

- ◇ La fórmula reproductora se reduce a

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{f(w) \, dm(w)}{\text{vol}(\mathbb{B}^n) (1 - z \cdot \overline{w})^{n+1}},$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ y para todo $z \in \mathbb{B}^n$.

- ◊ El núcleo de Bergman de la bola unidad $\mathbb{B}^n$ satisface

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{B}^n}(z, w) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{\pi^n \alpha!} z^\alpha \overline{w^\alpha} = \frac{n!}{\pi^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{n! \alpha!} z^\alpha \overline{w^\alpha} \\ &= \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)} \frac{1}{(1 - z \cdot \overline{w})^{n+1}}. \end{aligned}$$

- ◊ La fórmula reproductora se reduce a

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{f(w) \, dm(w)}{\text{vol}(\mathbb{B}^n) (1 - z \cdot \overline{w})^{n+1}},$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ y para todo $z \in \mathbb{B}^n$.

- ◊ Por lo anterior, se suele renormalizar m en $\mathbb{B}^n$ a la medida

$$dv(z) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)} \, dm(z).$$