

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Representaciones unitarias

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

- ◇ Las transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$ corresponden al grupo unitario

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}.$$

- ◇ Las transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$ corresponden al grupo unitario

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}.$$

- ◇ El grupo unitario $U(n)$ se puede describir como sigue.

- ◇ Las transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$ corresponden al grupo unitario

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}.$$

- ◇ El grupo unitario $U(n)$ se puede describir como sigue.
 - Para $n = 1$: $U(1) = \mathbb{T} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$ y proporciona las rotaciones $z \mapsto e^{i\theta}z$.

- ◇ Las transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$ corresponden al grupo unitario

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}.$$

- ◇ El grupo unitario $U(n)$ se puede describir como sigue.
 - ▶ Para $n = 1$: $U(1) = \mathbb{T} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$ y proporciona las rotaciones $z \mapsto e^{i\theta}z$.
 - ▶ Para $n = 2$: $U(2)$ consta de las matrices

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta}a & e^{i\theta}b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{C}$.

- ◇ Las transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$ corresponden al grupo unitario

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}.$$

- ◇ El grupo unitario $U(n)$ se puede describir como sigue.
 - ▶ Para $n = 1$: $U(1) = \mathbb{T} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$ y proporciona las rotaciones $z \mapsto e^{i\theta}z$.
 - ▶ Para $n = 2$: $U(2)$ consta de las matrices

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta}a & e^{i\theta}b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{C}$.

- ▶ Para n arbitrario: $U(n)$ consta de las composiciones de transformaciones del tipo anterior en 2-subespacios de $\mathbb{C}^n$.

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ no es compacto ni localmente compacto en ninguna de estas topologías.

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ no es compacto ni localmente compacto en ninguna de estas topologías.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ es de dimensión infinita.

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ no es compacto ni localmente compacto en ninguna de estas topologías.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ es de dimensión infinita.
- ◇ Resulta más apropiado considerar en este caso

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ no es compacto ni localmente compacto en ninguna de estas topologías.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ es de dimensión infinita.
- ◇ Resulta más apropiado considerar en este caso
 - ▶ grupos de dimensión finita (grupos de Lie),

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ no es compacto ni localmente compacto en ninguna de estas topologías.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ es de dimensión infinita.
- ◇ Resulta más apropiado considerar en este caso
 - ▶ grupos de dimensión finita (grupos de Lie),
 - ▶ representaciones unitarias de tales grupos,

- ◇ Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el grupo de operadores lineales unitarios se denota $U(\mathcal{H})$.
- ◇ Algunas propiedades cuando $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ posee dos topologías heredadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la topología uniforme dada por $\|\cdot\|$ y las topologías de operador (SOT y WOT).
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ no es compacto ni localmente compacto en ninguna de estas topologías.
 - ▶ $U(\mathcal{H})$ es de dimensión infinita.
- ◇ Resulta más apropiado considerar en este caso
 - ▶ grupos de dimensión finita (grupos de Lie),
 - ▶ representaciones unitarias de tales grupos,
 - ▶ estudiar las diferentes posibilidades.

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción
 - ⊙ $\rho(e, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{H}$, donde e es la identidad de G ,

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción
 - ⊙ $\rho(e, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{H}$, donde e es la identidad de G ,
 - ⊙ $\rho(g, \rho(h, v)) = \rho(gh, v)$, para todo $g, h \in G$ y para todo $v \in \mathcal{H}$,

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción
 - ⊙ $\rho(e, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{H}$, donde e es la identidad de G ,
 - ⊙ $\rho(g, \rho(h, v)) = \rho(gh, v)$, para todo $g, h \in G$ y para todo $v \in \mathcal{H}$,
 - ▶ la acción es a través de transformaciones lineales unitarias,

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción
 - ⊙ $\rho(e, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{H}$, donde e es la identidad de G ,
 - ⊙ $\rho(g, \rho(h, v)) = \rho(gh, v)$, para todo $g, h \in G$ y para todo $v \in \mathcal{H}$,
 - ▶ la acción es a través de transformaciones lineales unitarias,
 - ⊙ para cada $g \in G$, denotamos $\rho(g) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ el mapeo dado por $\rho(g)(v) = \rho(g, v)$,

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción
 - ⊙ $\rho(e, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{H}$, donde e es la identidad de G ,
 - ⊙ $\rho(g, \rho(h, v)) = \rho(gh, v)$, para todo $g, h \in G$ y para todo $v \in \mathcal{H}$,
 - ▶ la acción es a través de transformaciones lineales unitarias,
 - ⊙ para cada $g \in G$, denotamos $\rho(g) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ el mapeo dado por $\rho(g)(v) = \rho(g, v)$,
 - ⊙ requerimos que $\rho(g) \in U(\mathcal{H})$ para todo $g \in G$, es decir, $\rho(g)$ es lineal, biyectivo y preserva el producto interno.

- ◇ Si G es un grupo de Lie (o topológico de dimensión finita), una representación unitaria en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapeo $\rho : G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que
 - ▶ ρ es continuo,
 - ▶ ρ define una acción
 - ⊙ $\rho(e, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{H}$, donde e es la identidad de G ,
 - ⊙ $\rho(g, \rho(h, v)) = \rho(gh, v)$, para todo $g, h \in G$ y para todo $v \in \mathcal{H}$,
 - ▶ la acción es a través de transformaciones lineales unitarias,
 - ⊙ para cada $g \in G$, denotamos $\rho(g) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ el mapeo dado por $\rho(g)(v) = \rho(g, v)$,
 - ⊙ requerimos que $\rho(g) \in U(\mathcal{H})$ para todo $g \in G$, es decir, $\rho(g)$ es lineal, biyectivo y preserva el producto interno.
- ◇ En ocasiones abreviamos $\rho(g, v) = g \cdot v$.

- ◇ Primer ejemplo básico: representación unitaria de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por traslaciones.

- ◇ Primer ejemplo básico: representación unitaria de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por traslaciones.
 - ▶ $\tau : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$(\tau(y)(f))(x) = f(x - y).$$

- ◇ Primer ejemplo básico: representación unitaria de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por traslaciones.

▶ $\tau : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$(\tau(y)(f))(x) = f(x - y).$$

- ◇ Segundo ejemplo básico: representación unitaria de $U(n)$ en $L^2(\mathbb{C}^n)$ por rotaciones.

- ◇ Primer ejemplo básico: representación unitaria de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por traslaciones.

► $\tau : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$(\tau(y)(f))(x) = f(x - y).$$

- ◇ Segundo ejemplo básico: representación unitaria de $U(n)$ en $L^2(\mathbb{C}^n)$ por rotaciones.

► $\rho : U(n) \times L^2(\mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^n)$ dada por

$$(\rho(A)(f))(z) = f(A^{-1}z).$$

- ◇ Primer ejemplo básico: representación unitaria de $\mathbb{R}^n$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por traslaciones.

► $\tau : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$(\tau(y)(f))(x) = f(x - y).$$

- ◇ Segundo ejemplo básico: representación unitaria de $U(n)$ en $L^2(\mathbb{C}^n)$ por rotaciones.

► $\rho : U(n) \times L^2(\mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^n)$ dada por

$$(\rho(A)(f))(z) = f(A^{-1}z).$$

- ◇ Principio básico: si un grupo actúa sobre el dominio de un espacio de funciones, entonces podría usarse para definir una acción sobre el espacio de funciones.

- ◇ Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos su espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$.

- ◇ Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos su espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$.
- ◇ Hay dos simetrías fundamentales de $\mathbb{H}$ dadas por las siguientes acciones.

- ◇ Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos su espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$.
- ◇ Hay dos simetrías fundamentales de $\mathbb{H}$ dadas por las siguientes acciones.
 - ▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por traslaciones: $c \cdot z = z + c$.

- ◇ Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos su espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$.
- ◇ Hay dos simetrías fundamentales de $\mathbb{H}$ dadas por las siguientes acciones.
 - ▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por traslaciones: $c \cdot z = z + c$.
 - ▶ $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por homotecias: $r \cdot z = rz$.

- ◇ Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos su espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$.
- ◇ Hay dos simetrías fundamentales de $\mathbb{H}$ dadas por las siguientes acciones.
 - ▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por traslaciones: $c \cdot z = z + c$.
 - ▶ $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por homotecias: $r \cdot z = rz$.
- ◇ La primera acción define una representación unitaria sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(c \cdot f)(z) = f(z - c),$$

que es unitaria porque las traslaciones preservan integración.

- ◇ Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos su espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$.
- ◇ Hay dos simetrías fundamentales de $\mathbb{H}$ dadas por las siguientes acciones.
 - ▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por traslaciones: $c \cdot z = z + c$.
 - ▶ $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ por homotecias: $r \cdot z = rz$.
- ◇ La primera acción define una representación unitaria sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(c \cdot f)(z) = f(z - c),$$

que es unitaria porque las traslaciones preservan integración.

- ◇ La segunda acción nos lleva a considerar

$$(r \cdot f)(z) = f(r^{-1}z),$$

la cual preserva funciones holomorfas, pero no preserva la integral.

- ◇ Consideramos la acción $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}^2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(r \cdot f)(z) = r^{-1}f(r^{-1}z),$$

donde hemos multiplicado por la diferencial compleja de $z \mapsto rz$.

- ◇ Consideramos la acción $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}^2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(r \cdot f)(z) = r^{-1}f(r^{-1}z),$$

donde hemos multiplicado por la diferencial compleja de $z \mapsto rz$.

- ◇ Esta nueva acción preserva funciones holomorfas.

- ◇ Consideramos la acción $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}^2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(r \cdot f)(z) = r^{-1}f(r^{-1}z),$$

donde hemos multiplicado por la diferencial compleja de $z \mapsto rz$.

- ◇ Esta nueva acción preserva funciones holomorfas.
- ◇ En cuanto al producto interno, tenemos

$$\begin{aligned}\|r \cdot f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{H}} |(r \cdot f)(z)|^2 \, d\mathbf{m}(z) = \int_{\mathbb{H}} |f(r^{-1}z)|^2 r^{-2} \, d\mathbf{m}(z) \\ &= \int_{\mathbb{H}} |f(z)|^2 \, d\mathbf{m}(z) = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

por tanto, la acción es unitaria.

- ◇ Consideramos el grupo $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

- ◇ Consideramos el grupo $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.
- ◇ La acción $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dada por

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, define las transformaciones de Möbius que preservan $\mathbb{H}$.

- ◇ Consideramos el grupo $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.
- ◇ La acción $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dada por

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, define las transformaciones de Möbius que preservan $\mathbb{H}$.

- ◇ Esta acción contiene las dos acciones consideradas antes.

- ◇ Consideramos el grupo $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.
- ◇ La acción $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dada por

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, define las transformaciones de Möbius que preservan $\mathbb{H}$.

- ◇ Esta acción contiene las dos acciones consideradas antes.
- ◇ Dadas $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ y $A \in SL(2, \mathbb{R})$, la función

$$z \mapsto f(A^{-1}z)$$

es holomorfa, pero el producto interno no se preserva.

- ◇ El mapeo holomorfo $z \mapsto A^{-1} \cdot z$ tiene Jacobiano complejo $\det(dA_z^{-1}) = J_{\mathbb{C}}(A^{-1})(z)$ dado por

$$z \mapsto \frac{1}{(cz - a)^2}.$$

- ◇ El mapeo holomorfo $z \mapsto A^{-1} \cdot z$ tiene Jacobiano complejo $\det(dA_z^{-1}) = J_{\mathbb{C}}(A^{-1})(z)$ dado por

$$z \mapsto \frac{1}{(cz - a)^2}.$$

- ◇ Consideramos la acción $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}^2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(A \cdot f)(z) = J_{\mathbb{C}}(A^{-1})(z) f(A^{-1} \cdot z) = \frac{1}{(az - c)^2} f\left(\frac{dz - b}{a - cz}\right).$$

- ◇ El mapeo holomorfo $z \mapsto A^{-1} \cdot z$ tiene Jacobiano complejo $\det(dA_z^{-1}) = J_{\mathbb{C}}(A^{-1})(z)$ dado por

$$z \mapsto \frac{1}{(cz - a)^2}.$$

- ◇ Consideramos la acción $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}^2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{H})$ dada por

$$(A \cdot f)(z) = J_{\mathbb{C}}(A^{-1})(z) f(A^{-1} \cdot z) = \frac{1}{(az - c)^2} f\left(\frac{dz - b}{a - cz}\right).$$

- ◇ Tal expresión está bien definida y proporciona una representación unitaria.

- ◇ Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $\mathcal{A}^2(D)$ el correspondiente espacio de Bergman.

- ◇ Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $\mathcal{A}^2(D)$ el correspondiente espacio de Bergman.
- ◇ Denotamos $\text{Aut}(D) = \{\varphi : D \rightarrow D : \varphi \text{ es un biholomorfismo}\}.$

- ◇ Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $\mathcal{A}^2(D)$ el correspondiente espacio de Bergman.
- ◇ Denotamos $\text{Aut}(D) = \{\varphi : D \rightarrow D : \varphi \text{ es un biholomorfismo}\}$.
- ◇ En muchos casos importantes, $\text{Aut}(D)$ es un grupo de Lie.
Pero $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ no es grupo de Lie.

- ◇ Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $\mathcal{A}^2(D)$ el correspondiente espacio de Bergman.
- ◇ Denotamos $\text{Aut}(D) = \{\varphi : D \rightarrow D : \varphi \text{ es un biholomorfismo}\}$.
- ◇ En muchos casos importantes, $\text{Aut}(D)$ es un grupo de Lie. Pero $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ no es grupo de Lie.
- ◇ La acción $\text{Aut}(D) \times \mathcal{A}^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$ dada por

$$(\varphi \cdot f)(z) = J_{\mathbb{C}}(\varphi^{-1})(z) f(\varphi^{-1}(z))$$

define una representación unitaria.

- ◇ Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $\mathcal{A}^2(D)$ el correspondiente espacio de Bergman.
- ◇ Denotamos $\text{Aut}(D) = \{\varphi : D \rightarrow D : \varphi \text{ es un biholomorfismo}\}$.
- ◇ En muchos casos importantes, $\text{Aut}(D)$ es un grupo de Lie. Pero $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ no es grupo de Lie.
- ◇ La acción $\text{Aut}(D) \times \mathcal{A}^2(D) \rightarrow \mathcal{A}^2(D)$ dada por

$$(\varphi \cdot f)(z) = J_{\mathbb{C}}(\varphi^{-1})(z) f(\varphi^{-1}(z))$$

define una representación unitaria.

- ◇ La parte no trivial de la demostración utiliza la fórmula

$$J_{\mathbb{R}}\varphi = |J_{\mathbb{C}}\varphi|^2,$$

cuando $\varphi \in \text{Aut}(D)$.

- ◇ Para el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ consideramos

◇ Para el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ consideramos

▶ $U(1,1) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* l_{1,1} A = l_{1,1}\}$, con $l_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

◇ Para el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ consideramos

- ▶ $U(1,1) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* l_{1,1} A = l_{1,1}\}$, con $l_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ▶ El grupo de biholomorfismos de $\mathbb{D}$ se obtiene de la acción de $U(1,1)$ en $\mathbb{D}$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

◇ Para el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ consideramos

- ▶ $U(1, 1) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* I_{1,1} A = I_{1,1}\}$, con $I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ▶ El grupo de biholomorfismos de $\mathbb{D}$ se obtiene de la acción de $U(1, 1)$ en $\mathbb{D}$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- ▶ El grupo corresponde a las transformaciones de Möbius que preservan $\mathbb{D}$.

- ◇ Para la bola unidad $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ consideramos

- ◇ Para la bola unidad $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ consideramos
 - ▶ $U(n, 1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) : A^* I_{n,1} A = I_{n,1}\}$, donde
$$I_{n,1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ◇ Para la bola unidad $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ consideramos
 - ▶ $U(n, 1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) : A^* I_{n,1} A = I_{n,1}\}$, donde
$$I_{n,1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 - ▶ El grupo de biholomorfismos de $\mathbb{B}^n$ se obtiene de la acción de $U(n, 1)$ dada por

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{Az + b}{cz + d},$$

donde A es $n \times n$ y z se considera como columna.

- ◇ Para la bola unidad $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ consideramos
 - ▶ $U(n, 1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) : A^* I_{n,1} A = I_{n,1}\}$, donde
$$I_{n,1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 - ▶ El grupo de biholomorfismos de $\mathbb{B}^n$ se obtiene de la acción de $U(n, 1)$ dada por

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{Az + b}{cz + d},$$

donde A es $n \times n$ y z se considera como columna.

- ▶ El grupo corresponde a las transformaciones lineales fraccionales que preservan a $\mathbb{B}^n$.

- ◇ La bola unidad tiene generalizaciones matriciales.

- ◇ La bola unidad tiene generalizaciones matriciales.
- ◇ Recordamos, para $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^* = Q$, la notación

$Q > 0$ (definida positiva) $\iff zQz^* > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

- ◇ La bola unidad tiene generalizaciones matriciales.
- ◇ Recordamos, para $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^* = Q$, la notación

$Q > 0$ (definida positiva) $\iff zQz^* > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

- ◇ Denotamos $D_{m,n} = \{Z \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) : Z^*Z < I_n\}$.

- ◇ La bola unidad tiene generalizaciones matriciales.
- ◇ Recordamos, para $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^* = Q$, la notación

$Q > 0$ (definida positiva) $\iff zQz^* > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

- ◇ Denotamos $D_{m,n} = \{Z \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) : Z^*Z < I_n\}$.
- ◇ Definimos $U(m, n) = \{M \in M_{m+n}(\mathbb{C}) : MI_{m,n}M^* = I_{m,n}\}$,

donde $I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$.

- ◊ La bola unidad tiene generalizaciones matriciales.
- ◊ Recordamos, para $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^* = Q$, la notación

$Q > 0$ (definida positiva) $\iff zQz^* > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

- ◊ Denotamos $D_{m,n} = \{Z \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) : Z^*Z < I_n\}$.
- ◊ Definimos $U(m, n) = \{M \in M_{m+n}(\mathbb{C}) : M I_{m,n} M^* = I_{m,n}\}$,

donde $I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$.

- ◊ El grupo $\text{Aut}(D_{m,n})$ se obtiene de la acción de $U(m, n)$ sobre $D_{m,n}$ dada por

$$M \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1},$$

donde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y A es $m \times m$.