

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Tarea 1

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

- ◇ Sea $\ell^2(\mathbb{N})$ el espacio de Hilbert de sucesiones $(z_j)_{j=0}^{+\infty}$ complejas tales que $\sum_{j=0}^{+\infty} |z_j|^2 < +\infty$. Probar que el subconjunto $(e^{(k)})_{k=0}^{+\infty} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ dado por $e_j^{(k)} = \delta_{jk}$ es una base ortonormal.
- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $(u_j)_{j=0}^{+\infty}$ un conjunto ortonormal.

 - ▶ Investigue la noción de base de Hamel. Explique como se puede extender $(u_j)_{j=0}^{+\infty}$ a una base de Hamel $\mathcal{B}$.
 - ▶ Utilizar la base de Hamel del inciso anterior para probar la existencia de un operador lineal $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $T(u_j) = j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Concluir que T es discontinuo.

- ◇ Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ un operador acotado distinto de 0. Probar las siguientes propiedades.
 - ▶ Existe $u \in \mathcal{H}$ unitario perpendicular a $\ker(T)$. En particular, $T(u) \neq 0$.
 - ▶ Probar que, dado u del inciso anterior, para todo $v \in \mathcal{H}$ existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $y \in \ker(T)$ tales que $v = \lambda u + y$.
- ◇ Dados $U \subset \mathbb{C}$ dominio (abierto y conexo) y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ cuyas derivadas parciales en x, y ($z = x + iy$) existen probar que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

donde $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$.