

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Tarea 2

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

- ◇ En los siguientes problemas considere la identificación $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $(x, y) \mapsto x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- ◇ Probar que la transformación lineal $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida como $z \mapsto iz$ tiene representación matricial en $\mathbb{R}^{2n}$ dada por
$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$
- ◇ Probar que una matriz M real $2n \times 2n$ define una transformación lineal compleja si y sólo si se puede escribir como $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, donde A, B son matrices reales $n \times n$.

- ◇ En los siguientes problemas, considere el mapeo $\tau : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ dado por $\tau(z) = (|z_1|, \dots, |z_n|)$.
- ◇ Dibuje $\tau(P((0,0); (r_1, r_2)))$ donde $r_1, r_2 > 0$.
- ◇ Para los siguiente subconjuntos A de $\mathbb{C}^2$, dibuje $\tau(A)$.
 - ▶ $A = \mathbb{B}_2 = \{(z, w) : |z|^2 + |w|^2 < 1\}$.
 - ▶ $A = \{(z, w) : |z| + |w| < 1\}$.
 - ▶ $A = P((0,0), (r_1, r_2))$, donde $r_1, r_2 > 0$.
 - ▶ $A = P((0,0), (r_1, 1)) \cup \{(z, w) : |z| < 1, r_2 < |w| < 1\}$, donde $0 < r_1, r_2 < 1$.

- ◇ Para la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} (zw)^j$, con $z, w \in \mathbb{C}$, determine el mayor conjunto abierto U donde hay convergencia (uniforme sobre conjuntos compactos).
- ◇ Dibuje los polidiscos donde la serie del problema anterior converge.