

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Tarea 3

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Análisis y Sistemas Dinámicos
7–10 de abril de 2026

- ♦ Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Probar que se cumplen $L^\infty(U) \subset L^q(U) \subset L^p(U) \subset L^1(U)$, cuando $1 \leq p < q < \infty$.
- ♦ Definimos

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (c_j)_{j=0}^{+\infty} : c_j \in \mathbb{C}, \forall j, \sum_{j=0}^{+\infty} |c_j|^p < +\infty \right\},$$

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ (c_j)_{j=0}^{+\infty} : c_j \in \mathbb{C}, \forall j, (c_j)_{j=0}^{+\infty} \text{ es acotada} \right\}.$$

Probar que $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$, cuando $1 \leq p < q < +\infty$.

- ◇ Calcular la derivada compleja de la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- ◇ Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Probar que

$$\det(df_z) = |f'(z)|^2,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, donde $df_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la diferencial f considerada como función definida en $U \subset \mathbb{R}^2$ a valores en $\mathbb{R}^2$.