ω funcional positivo en A
álgebra de Banach involutiva.

def: $\omega(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in A$

$\therefore \quad \omega(y^*x) = \overline{\omega(x^*y)}$

$$|\omega(y^*x)|^2 \leq \omega(x^*x)\,\omega(y^*y)$$

Si A es unital:

$$\omega(x^*) = \omega(x^*1)$$
$$= \overline{\omega(1^*x)} = \overline{\omega(x)}$$
$$|\omega(x)|^2 \leq \omega(1)\,\omega(x^*x)$$

Kernel izquierdo de ω:

$$N_\omega = \{x \in A \mid \omega(x^*x) = 0\}$$

Kernel derecho de ω:

$$\{x \in A \mid \omega(xx^*) = 0\}$$

Lema: ω positivo en A. Entonces N_ω es ideal izquierdo.

Dem.:

$x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$x \in N_\omega$: $\quad \omega((\alpha x)^*(\alpha x)) = |\alpha|^2\omega(x^*x) = 0$

$\therefore \quad \alpha x \in N_\omega$

$x, y \in N_\omega$:

$\omega((x+y)^*(x+y)) =$

$= \omega(\underbrace{x^*x + y^*y}_{0} + x^*y + y^*x)$

$= \omega(x^*y) + \omega(y^*x) = 2\mathrm{Re}(\omega(x^*y))$

$\leq 2|\omega(x^*y)| \leq 2\omega(x^*x)^{\frac{1}{2}}\omega(y^*y)^{\frac{1}{2}} = 0$

$\therefore\ x + y \in N_\omega$

$x \in N_\omega,\ a \in A$:

$\omega((ax)^*(ax)) = \omega(x^*a^*ax)$

$\leq \omega(x^*x)^{\frac{1}{2}}\ \omega((a^*ax)^*(a^*ax))^{\frac{1}{2}} = 0$

$\therefore\ ax \in N_\omega.$

A álgebra de Banach involutiva
ω Funcional lineal positivo en A
N_ω Kernel izq. de ω.

$\therefore\ A/N_\omega$ espacio vectorial complejo.

$$\eta_\omega : A \longrightarrow A/N_\omega$$
$$\eta_\omega(x) = x + N_\omega.$$

Luego:

$$A/N_\omega \times A/N_\omega \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \rangle = \omega(y^*x)$$

es un producto Hermitiano definido positivo.

$\therefore\ A/N_\omega$ es pre-Hilbert.

Sea H_ω el espacio de Hilbert completación de A/N_ω.

Idea de la representación:

$$A \xrightarrow{\pi_\omega} \mathcal{L}(H_\omega)$$

$$\pi_\omega(a)(x+N_\omega) = ax + N_\omega \quad \ldots$$

En lo sucesivo A es álgebra de Banach involutiva a menos que se diga algo extra.

Lema: $a \in A \ni \|1-a\|_{sp} < 1$
Entonces $\exists\, b \in A$ tal que $b^2 = a$.
Si a es Hermitiano, b se puede escoger Hermitiano.
(Ver libro)

Lema: Si A es unital, entonces todo funcional positivo ω es continuo y $\|\omega\| = \omega(1)$.

Dem.: Dado $x \in A$ Hermitiano:

$$|\omega(x)| \leq ?$$

Suponemos $\|x\| < 1$

$\therefore \quad 1 - x \geq 0$

$\therefore \quad \omega(1) - \omega(x) = \omega(1-x) \geq 0.$

$\therefore \quad \omega(x) \leq \omega(1) \quad \forall x$ Hermitiano.

Sea $x \in A$, $\|x\| < 1$:

$$|\omega(x)|^2 = |\omega(1^* x)|^2$$

$$\leq \omega(1^*1)\,\omega(x^*x)$$
$$= \omega(1)\,\omega(x^*x) \leq \omega(1)^2$$

$\therefore \quad \|\omega\| \leq \omega(1)$. y ω es continuo.

Pero:

$$\omega(1) = |\omega(1)| \leq \|\omega\|\,\|1\| = \|\omega\|$$

$\therefore \quad \|\omega\| = \omega(1)$. //

Lema: A con ω positivo.
$\forall a \in A$ definimos:

$$\omega_a : A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\omega_a(x) = \omega(axa^*)$$

$\Rightarrow$ ω_a es positivo, continuo y $\|\omega_a\| \leq \omega(aa^*)$.

Dem.: Sea $A_1 = \mathbb{C}1 \oplus A$ la correspondiente álgebra unital.
Extendemos:

$$\tilde{\omega}_a : A_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\tilde{\omega}_a(x) = \omega(\underbrace{axa^*}_{\text{en } A}) \quad x \in A_1.$$

y se usa el lema anterior. //

Lema: Sea A con unidad aproximada $(u_i)_i$ acotada por r:

$\|u_i\| \leq r \quad \forall i.$

Sea ω positivo continuo en A. Entonces:

(i) $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)} \quad \forall x \in A$

(ii) $|\omega(x)|^2 \leq r^2 \|\omega\| \omega(x^*x) \quad \forall x \in A$

Dem.: Para (i):

$$\omega(x^*) = \omega(\lim_i x^* u_i)$$
$$= \lim_i \omega(x^* u_i) = \lim_i \overline{\omega(u_i^* x)}$$
$$= \lim_i \overline{\omega((x^* u_i)^*)} = \overline{\omega(x^{**})} = \overline{\omega(x)}$$

Para (ii):

$$|\omega(x)|^2 = \lim_i |\omega(u_i^* x)|^2$$

$$\left(|\omega(u_i^* x)| = |\overline{\omega(x^* u_i)}| = |\omega(x^* u_i)|\right)$$

$$\leq \limsup_i \omega(u_i^* u_i)\, \omega(x^* x)$$

$$\leq \|\omega\| \sup_i \|u_i^* u_i\|\, \omega(x^* x)$$

$$\leq \|\omega\| \sup_i \|u_i\|^2\, \omega(x^* x)$$

$$\leq r^2 \|\omega\|\, \omega(x^* x).$$

//

Proposición:
Si A es C^*-álgebra y ω es positivo en A, entonces ω es continuo.

Dem.:

Sea $S = \overline{B(0,1)} \subseteq A$. Por probar que:
$$\{|\omega(x)| \mid x \in S\} \text{ es acotado.}$$

Sea $(x_n)_n \subseteq S \cap A_+$. Veamos que
$$(\omega(x_n))_n$$
es acotado. Observamos que:
$$\omega(x_n) \geq 0 \quad \forall n.$$
Sea $(\lambda_n)_n \subseteq [0,+\infty)$ sumable.
Entonces:
$$\left\|\sum_{k=m}^{n} \lambda_k x_k\right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \|x_k\| \leq \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

$\therefore$ $\exists\, x \in A$ tal que:
$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k x_k$$

Además:
$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k x_k \geq 0$$

pues A_+ es cono cerrado.

Por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega(x_k) = \omega\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \omega(x)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \omega(x_k) < +\infty$$

$\Rightarrow$ $(\omega(x_n))_n$ es acotado.

Luego:

$\{\omega(x) \mid x \in A_+ \cap S\}$ es acotado.
por una $M > 0$.

Sea $x \in A \cap S$, entonces

$$x = a + ib \quad , \; a, b \text{ Hermitiano.}$$

$$= (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$$

$$\therefore |\omega(x)| = |\omega(a_+) - \omega(a_-) + i\omega(b_+) - i\omega(b_-)|$$

$$\leq 4M.$$

$\rightarrow$) Obs.: La conclusión anterior vale también para A álgebra de Banach involutiva con unidad aproximada acotada.

Teorema:
A álgebra de Banach involutiva con unidad aproximada acotada.
ω funcional lineal positivo (continuo)
Entonces, existe una única (hasta equivalencia unitaria) representación:

$$\pi_\omega : A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\omega)$$

junto con un vector $\xi_\omega \in H_\omega$ tales que:

(i) $[\pi_\omega(A)\xi_\omega] = H_\omega$

(ii) $\omega(x) = \langle \pi_\omega(x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle \ \forall x \in A$.

Dem.:

Unicidad:

Sean $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$ y $(\pi'_\omega, H'_\omega, \xi'_\omega)$ que satisfacen (i) y (ii).

Tenemos:

$$\begin{array}{ccc} H_\omega = [\pi_\omega(A)\xi_\omega] & & H'_\omega = [\pi'_\omega(A)\xi'_\omega] \\ \pi_\omega(x)\xi_\omega & \overset{?}{\longmapsto} & \pi'_\omega(x)\xi'_\omega \\ \| & & \| \\ \pi_\omega(y)\xi_\omega & \Longrightarrow ? & \pi'_\omega(y)\xi'_\omega \end{array}$$

Vemos que:

$$\langle \pi_\omega(x)\xi_\omega, \pi_\omega(y)\xi_\omega \rangle =$$
$$= \langle \pi_\omega(y)^* \pi_\omega(x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle$$
$$= \langle \pi_\omega(y^*x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle$$
$$= \omega(x^*y) = \langle \pi'_\omega(y^*x)\xi'_\omega, \xi'_\omega \rangle$$

$= \langle \pi'_\omega(x)\xi'_\omega, \pi'_\omega(y)\xi'_\omega \rangle$

Con $y = x$:

$$\|\pi_\omega(x)\xi_\omega\| = \|\pi'_\omega(x)\xi'_\omega\|$$

Luego $x \rightsquigarrow y - x$

$$\|\pi_\omega(y)\xi_\omega - \pi_\omega(x)\xi_\omega\| =$$
$$= \|\pi'_\omega(y)\xi'_\omega - \pi'_\omega(x)\xi'_\omega\|$$

Por tanto:

$$U_0 : \pi_\omega(A)\xi_\omega \longrightarrow \pi'_\omega(A)\xi'_\omega$$
$$\pi_\omega(x)\xi_\omega \longmapsto \pi'_\omega(x)\xi'_\omega$$

es unitario bien definido.
Por densidad se extiende a

$$U : H_\omega \longrightarrow H'_\omega \quad \text{unitario.}$$

Además:

$$\pi'_\omega(x)U = U\pi_\omega(x) \quad \forall x \in A$$

pues:

$$\pi'_\omega(x)U\pi_\omega(y)\xi_\omega =$$
$$= \pi'_\omega(x)\pi'_\omega(y)\xi'_\omega$$
$$= \pi'_\omega(xy)\xi'_\omega = U\pi_\omega(xy)\xi_\omega$$
$$= U\pi_\omega(x)\pi_\omega(y)\xi_\omega. \checkmark$$