$S \subseteq B^*$ compacto convexo.

$\varphi \in S$ extremo

$\iff \quad \varphi = \lambda \varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 , \ \lambda \in (0,1)$

$\varphi_1, \varphi_2 \in S \implies \varphi = \varphi_1 = \varphi_2.$

Dado $C \subseteq B^*$ el casco convexo cerrado de C es:

$$\overline{\mathrm{con}}(C) = \text{menor cerrado convexo que contiene a } C$$

$$= \bigcap \left\{ K \subseteq B^* \;\middle|\; \begin{array}{c} K \text{ convexo cerrado} \\ C \subseteq K \end{array} \right\}$$

$$= \overline{\left\{ \begin{array}{l} \text{combinaciones lineales} \\ \text{convexas en } C \end{array} \right\}}$$

combinaciones lineales convexas:

$$c = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j$$

con $c_1, \dots, c_n \in C$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

Comparar con:

$$\underset{\lambda_1}{\lambda}\, c_1 + \underset{\lambda_2}{(1-\lambda)}\, c_2$$

Tma. de Krein-Milman:

$C \subseteq B^*$ es compacto convexo y $E(C)$ es el conjunto de sus puntos extremos, entonces:

$$C = \overline{\mathrm{con}}(E(C)).$$

En nuestro caso:

$$S = \overline{\mathrm{con}}(P(B))$$

$\therefore$ $\forall \varphi \in S$ (funcional positivo, $\|\varphi\| \leq 1$) $\exists (\varphi_\alpha)_\alpha$ tal que:

$$\varphi_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} \varphi \quad \text{top. } *\text{-débil}$$

donde $\varphi_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \omega_i^\alpha$ con $\omega_i^\alpha \in P(B)$.
En particular, a ω_i^α le corresponde una rep. irreducible.

Sea $x \in B \setminus \{0\}$ ¿Existe rep. π irred. de B $\ni$:

$$\pi(x) \neq 0 \,?$$

Es decir, ¿existe $\omega \in P(A)$ tal que

$$\pi_\omega(x) \neq 0 \,?$$

Para un tal ω recordamos:

$$\|\pi_\omega(x)\xi_\omega\|^2 = \omega(x^*x)$$

Luego queremos probar la exis_

tencia de $\omega \in P(A)$ tal que:

$$\omega(x^*x) \neq 0.$$

Supongamos que:

$$\omega(x^*x) = 0 \quad \forall \omega \in P(A).$$

Sea $\varphi \in S$. Escribimos:

$$\varphi = \lim_{\alpha} \varphi_\alpha$$

φ_α comb. lineal convexa como arriba.

$$\therefore \quad \varphi(x^*x) = \lim_{\alpha} \varphi_\alpha(x^*x) = \lim_{\alpha} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \omega_i^\alpha (x^*x) = 0$$

Después de multiplicar por constantes positivas concluimos que:

$$\varphi(x^*x) = 0$$

$\forall \varphi$ funcional positivo.

Sea ahora (π, H) una representación cualquiera de B. Entonces:

$$\|\pi(x)\|^2 = \sup\left\{ \langle \pi(x)\xi, \pi(x)\xi \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi \in H \\ \|\xi\| \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$= \sup\left\{ \langle \pi(x^*x)\xi, \xi \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi \in H \\ \|\xi\| = 1 \end{array} \right\}$$

Pero para todo $\xi \in H$ el

mapeo:

$$y \longmapsto \langle \pi(y)\xi, \xi \rangle$$

es un funcional positivo de B.
Concluimos de la fórmula anterior que:

$$\|\pi(x)\| = 0$$

$\forall$ rep. (π, H) de B. Como B es una C^*-álgebra esto implica $x = 0$, que es una contradicción.

Luego $\exists\ \omega \in P(B)$ tal que:

$$\omega(x^* x) \neq 0$$

y para la rep. irreducible (π_ω, H_ω) tenemos:

$$\|\pi_\omega(x)\xi_\omega\|^2 = \omega(x^* x) \neq 0$$

$\therefore\ \pi_\omega(x) \neq 0.$

Folland, Análisis Armónico
$L^1(G)$.

Def.: G se dice grupo topológico si es grupo, espacio topológico y las operaciones:

$$G\times G \longrightarrow G \qquad\qquad G \longrightarrow G$$
$$(g,h) \longmapsto gh \qquad\qquad g \longmapsto g^{-1}$$

son continuas.

Notaciones:

xA, AB, Bx, A^{-1}

$$A^2 \neq AA$$

A se dice simétrico si:

$$A^{-1} = A$$

Algunas propiedades:

*) Toda vecindad de $x\in G$ es de la forma:

$$xU$$

con U vecindad de e.

*) Toda vecindad de e contiene

una vecindad de e simétrica.

$$e \in U \Rightarrow e \in V = U \cap U^{-1} \subseteq U$$

*) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow e \notin A^{-1}B$

*) $\forall$ U vec. de e $\exists$ V vecindad simétrica de e tal que:

$e \in VV \subseteq U$

*) U abierto $\Rightarrow$ son abiertos:

xU, Ux, U^{-1}

*) H subgrupo abierto de G

$\Rightarrow$ H es cerrado.

Pues podemos escribir:

$$G = \coprod_{x \in S} xH \quad \text{(unión disjunta)}$$

para algún $S \subseteq G$, $e \in S$. Y tenemos:

$$H = \Big(\coprod_{x \in S \setminus \{e\}} xH\Big)^c \text{ cerrado.}$$

Nos interesa:

G grupo topológico localmente compacto T_2.

G viene con las acciones

naturales:

$$L, R : G \times C(G) \longrightarrow C(G)$$

$$(L_y f)(x) = f(y^{-1}x)$$

$$(R_y f)(x) = f(xy)$$

$\therefore$ $L_y L_z = L_{yz}$, $R_y R_z = R_{yz}$

Recordamos que continuidad uniforme se puede definir en:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

*) $X = \mathbb{R}^n$:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

*) X TVS:

$$x - y \in V \text{ (vec. de } 0) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

*) $X = G$ grupo topológico

$$y^{-1}x \in V \text{ (vec. de } e) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

pero podemos pedir que:

$y^{-1}x$ ó xy^{-1} ó $x^{-1}y$ ó yx^{-1}

pertenezca a V

Pero:

$$(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y$$

$$(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$$

Luego solamente quedan dos posibilidades:

$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ puede ser uniformemente continua en uno de los siguientes dos sentidos:

*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists V$ vec. simétrica de e tal que:

$$y^{-1}x \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists V$ vec. simétrica de e tal que:

$$xy^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Por otro lado:

$$|L_y f(x) - f(x)| =$$

$$= |f(y^{-1}x) - f(x)|$$

$$(y^{-1}x)x^{-1} = y^{-1}$$

y también:

$$|R_y f(x) - f(x)| =$$

$$= |f(xy) - f(x)|$$

$$x^{-1}(xy) = y$$

Def: $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice uniformemente continua:

*) por la izquierda si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ V vec. simétrica de e $\ni$

$$|L_y f(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in G, y \in V$$

*) por la derecha si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ V vec. simétrica de e $\ni$

$$|R_y f(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in G, y \in V$$

Prop.: Si G es grupo topológico y $f \in C_c(G)$, entonces f es uniformemente continua por la izq. y por la der.
(Folland Prop. 2.6, página 34)

página 38
2da ed.