G grupo topológico localmente compacto

$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice:

*) f es uniformemente contínua por la izq. si y sólo si:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ V vecindad simétrica de e en G tal que:

$$|L_y f(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in G \quad \forall y \in V$$

es decir, si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ V vecindad de e en G tal que:

$$\|L_y f - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall y \in V.$$

Similarmente, por la derecha.

Se enunció:

Si $f \in C_c(G)$ entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ V vec. de e en G tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \|L_y f - f\|_\infty < \varepsilon \\ \|R_y f - f\|_\infty < \varepsilon \end{array}\right. \quad \forall y \in V$$

Tenemos una acción:

$L: G \times C_c(G) \longrightarrow C_c(G)$

$$(L_x f)(y) = f(x^{-1}y)$$

Sea $f \in C_c(G)$ y

$$A = \{ y \in G \mid f(y) \neq 0 \}$$

$\therefore$ $\operatorname{supp} f = \bar{A}$ compacto.

$f(x^{-1}y) \neq 0 \iff x^{-1}y \in A$

$\iff y \in xA$

$\therefore$ $\operatorname{supp} L_x f = \overline{xA} = x\bar{A} = x \operatorname{supp} f$

Además:

$$L_x(af + bg)(y) =$$
$$= (af + bg)(x^{-1}y)$$
$$= af(x^{-1}y) + bg(x^{-1}y)$$
$$= (a L_x f + b L_x g)(y)$$

$\therefore$ L_x es lineal $\forall x \in G$.

Pero:

$$\|L_x f\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \forall x \in G, f \in C_c(G)$$

Luego, tenemos una acción isométrica de G sobre el espacio normado $(C_c(G), \| \ \|_\infty)$.

Pregunta:

¿$x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x \Rightarrow L_{x_\alpha} f \xrightarrow[\alpha]{} L_x f$?

Tenemos: $f \in C_c(G)$, $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x$

$$\| L_{x_\alpha} f - L_x f \|_\infty =$$
$$= \| L_x (L_{x^{-1} x_\alpha} f - f) \|_\infty$$
$$= \| L_{x^{-1} x_\alpha} f - f \|_\infty$$

$x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x \Rightarrow x^{-1} x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x^{-1} x = e$

Si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces $\exists\ V$ vecindad de e en G tal que:

$$\| L_y f - f \|_\infty < \varepsilon \quad \forall y \in V$$

y existe α_0 tal que $\alpha \geq \alpha_0$ implica:

$$x^{-1} x_\alpha \in V$$

$$\therefore \| L_{x^{-1} x_\alpha} f - f \|_\infty < \varepsilon \quad \forall \alpha \geq \alpha_0$$

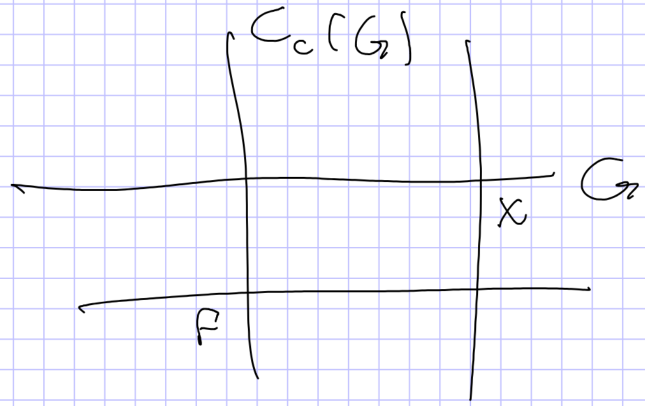
$$\therefore L_{x_\alpha} f \xrightarrow[\alpha]{} L_x f \quad \forall f \in C_c(G)$$

Por tanto, la acción:

$$L : G \times C_c(G) \longrightarrow C_c(G)$$

es continua en G y en $C_c(G)$.

Es decir tenemos continuidad separada en ambas variables.



En general:

$$\|L_x f - L_{x_0} f_0\|_\infty =$$
$$= \|L_x(f - f_0) + (L_x - L_{x_0}) f_0\|_\infty$$
$$\leq \|f - f_0\|_\infty + \|L_x f_0 - L_{x_0} f_0\|_\infty \longrightarrow 0$$

cuando $(x, f) \longrightarrow (x_0, f_0)$.

Hemos usado:

$$\|L_x(f - f_0)\|_\infty = \|f - f_0\|_\infty$$

pero en general:

$$\|\pi(x)(f - f_0)\| \leq \|\pi(x)\| \|f - f_0\|_\infty$$

Se puede hacer algo similar por la derecha.

Definición: Sea G un grupo topológico localmente compacto T_2. Una medida de Haar izquierda en G es μ tal que:

*) μ es medida de Radon, i.e. medida sobre los conjuntos de Borel que es:

regular internamente en abiertos:

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U \text{ compacto}\}$$

regular externamenteu en conjuntos de Borel:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U \text{ abierto}\}$$

μ finita en compactos.

**) $\mu(xE) = \mu(E) \quad \forall x \in G, E \subseteq G$ Borel.

Hay una definición similar de medida de Haar derecha.

Observamos que:

$$L_x \chi_A = \chi_A \circ x^{-1} = \chi_{xA}$$

pues:

$$\chi_A(x^{-1}y) = 1 \iff x^{-1}y \in A$$

$$\iff y \in xA \iff \chi_{xA}(y) = 1$$

Sea μ una medida de Haar (izq.) y A Borel. Entonces $\forall x \in G$:

$$\int_G L_x \chi_A \, d\mu = \int_G \chi_{xA} \, d\mu$$

$$= \int_{xA} d\mu$$

$$= \mu(xA) = \mu(A)$$

$$= \int_G \chi_A \, d\mu$$

Luego $\forall s$ simple:

$$\int_G L_x s \, d\mu = \int_G s \, d\mu$$

Si $f \in C_c(G)$, $f \geq 0$, entonces:

$$\int_G f \, d\mu = \sup\left\{ \int_G s \, d\mu \;\middle|\; \begin{matrix} s \text{ simple} \\ 0 \leq s \leq f \end{matrix} \right\}$$

$$= \int_G L_x f \, d\mu$$

Si f es arbitraria en $C_c(G)$ escribimos:

$$f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$$
$$= (\mathrm{Re}(f)_+ - \mathrm{Re}(f)_-) + i(\mathrm{Im}(f)_+ - \mathrm{Im}(f)_-)$$

Por tanto:

$$\int_G L_x f \, d\mu = \int_G f \, d\mu$$

$\forall x \in G$, $f \in C_c(G)$.

Más aún (misma demostración):

Prop.: $\forall f \in L^1(G)$, $x \in G$:

$$\int_G L_x f \, d\mu = \int_G f \, d\mu$$

Tma.: (2.10 en página 41, Folland)
Sea G grupo topológico localmente compacto T_2.
Entonces G posee una medida de Haar izquierda μ.
Si μ_0 es otra medida de Haar izquierda, entonces $\exists$ $c > 0 \ni$

$$\mu_0 = c\mu.$$

Obs.: Si μ es de Haar izq. entonces:

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$$

es medida de Haar derecha:

$$\tilde{\mu}(Ex) = \mu((Ex)^{-1}) = \mu(x^{-1}E^{-1})$$
$$= \mu(E^{-1}) = \tilde{\mu}(E)$$

Idea de la dem.:

En $\mathbb{R}^n$: $\chi_{[0,1]^n}$ con $\int \chi_{[0,1]^n} = 1$.

y se forman:

$$s = \sum_j c_j \chi_{[0,1]^n + x_j}$$

y dada $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ aproximamos

$$s_n \xrightarrow[n]{} f \quad \therefore \quad \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \lim_n \sum_j c_j^n$$

En general, se toma $\phi \in C_c(G)$ normalizada a:

$$\text{“}\int \phi \, d\mu\text{''} = 1$$

y aproximamos:

$$F = \lim_n \sum_j c_j^n L_{x_j} \phi$$

$$\therefore \quad \int f \, d\mu = \lim_n \sum_j c_j^n \ldots$$

Prop.: Toda medida de Haar satisface:

$\mu(U) > 0 \quad \forall \, U$ abierto $\neq \emptyset$.

$$\int_G f \, d\mu > 0 \quad \forall \, f \geq 0, \ f \in C_c(G) \setminus \{0\}$$

Prop.: (2.21 página 45, Folland)
Sea G grupo topológico tal que $G \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto.
Supongamos que en G:

$$xy = A(x)y + b(x) \quad \forall x, y \in G$$

donde $A(x)$ es lineal en $\mathbb{R}^N$ y $b(x) \in \mathbb{R}^N$.

$\Longrightarrow$ una medida de Haar izq. en G es dada por:

$$d\mu(x) = |\det(A(x))|^{-1} dx$$

donde dx es Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Basta probar que:

$$\int_G f(x^{-1}y)\,|\det(A(y))|^{-1}\,dy = \int_G \underbrace{f(y)\,|\det(A(y))|^{-1}}_{g(y)}\,dy$$

$\forall f \in C_c(G)$

$x \in G$.

Ejemplos en Folland página 45.