En lo sucesivo:

G grupo topológico localmente compacto $T_2$.

$\lambda$ (una) medida de Haar izq.

Tenemos:

$$L^p(G) = L^p(G,\lambda) \qquad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Consideramos la acción:

$$L : G \times L^p(G) \longrightarrow L^p(G)$$
$$(L_x f)(y) = f(x^{-1}y)$$

Por tanto: $f \in L^p(G)$

$$\|L_x f\|_p = \left(\int_G |f(x^{-1}y)|^p \, d\lambda(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\int_G |f(y)|^p \, d\lambda(y)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

y es una acción por isometrías.

$\therefore$ $\forall x \in G$:

$$L_x : L^p(G) \longrightarrow L^p(G)$$

es isométrico acotado.

En particular, el mapeo acción:

$$G \times L^p(G) \longrightarrow L^p(G)$$

es continuo en la segunda entrada, i.e. $\forall x_0 \in G$ fijo, el mapeo:

$$f \longmapsto L_{x_0} f$$

es continuo.

Pregunta: ¿Hay continuidad en $G$ con $f_0 \in L^p(G)$ fijo?

Observamos:

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x \text{ en } G, \; f_0 \in L^p(G) \text{ fijo.}$$

$$¿\; L_{x_\alpha} f_0 \xrightarrow[\alpha]{} L_x f_0 \;?$$

Para ello:

$$\| L_{x_\alpha} f_0 - L_x f_0 \|_p =$$

$$= \| L_x ( L_{x^{-1} x_\alpha} f_0 - f_0 ) \|_p$$

$$= \| L_{x^{-1} x_\alpha} f_0 - f_0 \|_p$$

En otras palabras:

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} e, \; f_0 \text{ fijo}$$

$$¿\; L_{x_\alpha} f_0 \xrightarrow[\alpha]{} f_0 \;?$$

Veremos que ambos casos tienen en respuesta afirmativa.

Tenemos que probar:

$$x_\alpha \longrightarrow e \implies L_{x_\alpha} f_0 \xrightarrow[\alpha]{} f_0 \text{ en } L^p(G)$$

Por otro lado sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} e \\ g_0 \in C_c(G) \end{array}\right\} \Longrightarrow L_{x_\alpha} g_0 \xrightarrow[\alpha]{} g_0 \text{ en } \| \ \|_\infty .$$

Probamos como sigue.

Suponemos $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} e$ en $G$, $f_0 \in L^p(G)$.

Dado $\varepsilon > 0$ escogemos $g_0 \in C_c(G)$ tal que:

$$\|f_0 - g_0\|_p < \varepsilon$$ (Teoría de la medida, e.g. Rudin, Folland)

Luego:

$$\|L_{x_\alpha} f_0 - f_0\|_p \leq$$

$$\leq \|L_{x_\alpha} f_0 - L_{x_\alpha} g_0\|_p + \|L_{x_\alpha} g_0 - g_0\|_p + \|g_0 - f_0\|_p$$

$$= 2\|f_0 - g_0\|_p + \|L_{x_\alpha} g_0 - g_0\|_p$$

Sea $\alpha_0$ tal que:

$$\|L_{x_\alpha} g_0 - g_0\|_\infty < \varepsilon \quad \forall \alpha \geq \alpha_0 .$$

Luego:

$$\|L_{x_\alpha} g_0 - g_0\|_p^p = \int_G |g_0(x_\alpha^{-1} y) - g_0(y)|^p \, d\lambda(y)$$

el integrado es igual a cero en el complemento de:

$$x_\alpha K \cup K$$

con $K = \operatorname{supp} g_0$ que es compacto.

$$= \int_{x_\alpha K \cup K} |g_0(x_\alpha^{-1} y) - g_0(y)|^p \, d\lambda(y)$$

$$\leq \varepsilon^p (\lambda(x_\alpha K) + \lambda(K)) = 2\lambda(K)\varepsilon^p$$

$\therefore \ \forall \alpha \geq \alpha_0$:

$$\| L_{x_\alpha} g_0 - g_0 \|_p \leq (2\lambda(K))^{\frac{1}{p}} \varepsilon$$

Por tanto: dado $\varepsilon > 0 \ \exists \alpha_0$
$\forall \alpha \geq \alpha_0$:

$$\| L_{x_\alpha} f_0 - f_0 \|_p < \varepsilon (2 + (2\lambda(K))^{\frac{1}{p}})$$

Tenemos:

Proposición:
La acción $L: G \times L^p(G) \longrightarrow L^p(G)$ es continua en cada variable. En particular, la acción $L$ es continua.

Dem.: $x_\alpha \longrightarrow x$, $f_\alpha \longrightarrow f$:

$$\|L_{x_\alpha} f_\alpha - L_x f\|_p \leq$$

$$\leq \|L_{x_\alpha} f_\alpha - L_{x_\alpha} f\|_p + \|L_{x_\alpha} f - L_x f\|$$

$$= \|f_\alpha - f\|_p + \|L_{x_\alpha} f - L_x f\|_p \xrightarrow[\alpha]{} 0$$

//

La acción $L$ se puede ver como una representación:

$$\begin{aligned} L: G &\longrightarrow \mathcal{B}(L^p(G)) \\ x &\longmapsto L_x \end{aligned}$$

(operadores acotados en $L^p(G)$)

y es homomorfismo:

$$L: G \longrightarrow GL(L^p(G)) \text{ (invertibles)}$$

de grupos.

Hemos probado que:

$x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x$ en $G$ $\Longrightarrow$ $\forall f_0 \in L^p(G)$ $L_{x_\alpha} f_0 \xrightarrow[\alpha]{} L_x f_0$ (top. fuerte)

Corolario:
El homomorfismo $L: G \longrightarrow GL(L^p(G))$ es continuo en la topología fuerte.

En general, $L$ no es continuo para la topología de norma de operadores en $B(L^p(G))$.

Ejemplo:

$G = \mathbb{R}$, $d\lambda = dx$ Lebesgue, $p = 2$.

$x \in \mathbb{R}$: $(L_x f)(y) = f(y-x)$

Veremos que:

$$\| L_{\frac{1}{n}} - I \| \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

norma de operadores.

Recordamos:

$$\|T_n - I\| = \sup\left\{ \|T_n f - f\|_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \\ \|f\| \leq 1 \end{array} \right\}$$

y esto converge a 0

$\Longleftrightarrow$ $\forall f$ con $\|f\| \leq 1$:

$\|T_n f - f\|_2$ pequeño independientemente de $f$.

Definimos:

$$f_n = \sqrt{n}\, \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$$

$$\therefore \|f_n\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{n}\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]})^2 (x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}} n\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]} (x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Ademas:

$$L_{\frac{1}{n}} f_n = \sqrt{n}\, L_{\frac{1}{n}}(\chi_{[0,\frac{1}{n}]}) = \sqrt{n}\, \chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$$

Luego:

$$\|L_{\frac{1}{n}} f_n - f_n\|_2 =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |\sqrt{n}\,\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]} - \sqrt{n}\,\chi_{[0,\frac{1}{n}]}|^2(x)\, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(A \cap B = \phi : |\chi_A - \chi_B| = \chi_{A \cup B})$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |\sqrt{n}\,\chi_{[0,\frac{2}{n}]}|^2(x)\, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} n\,\chi_{[0,\frac{2}{n}]}(x)\, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \|L_{\frac{1}{n}} - I\| \geq \|L_{\frac{1}{n}} f_n - f_n\|_2 = \sqrt{2} > 0$$

$\therefore$ $L_{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} I$ en la topología de norma de operadores. //

Definición:

G grupo topologico localmente compacto $T_2$. Una representación de $G$ en un espacio de Banach $V$ es una acción:

$$\pi : G \times V \longrightarrow V$$

continua tal que $\forall x \in G$:

$$\pi(x) : V \longrightarrow V$$

$$\pi(x)v = \pi(x, v)$$

es lineal. Equivalentemente ⊛, $\pi$ es un homomorfismo continuo:

$$\pi : G \longrightarrow (GL(V), \text{top. fuerte})$$

⊛ hay que probarlo. Parte del cálculo se hace con:

$$\|\pi(x_\alpha)v_\alpha - \pi(x)v\| \leq$$

$$\leq \|\pi(x_\alpha)(v_\alpha - v)\| + \|\pi(x_\alpha)v - \pi(x)v\|$$

$$\leq \|\pi(x_\alpha)\| \, \|v_\alpha - v\| + \|\pi(x_\alpha)v - \pi(x)v\|$$

con $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x$, $v_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} v$

$\forall v$ fijo $(\pi(x_\alpha)v)_\alpha$ es acotado.

TAU $\Longrightarrow$ $(\|\pi(x_\alpha)\|)_\alpha$ es acotado.