Sea G grupo localmente compacto T_2
λ medida de Haar izq. de G.

$\therefore$ $$\lambda(xE) = \lambda(E) \quad \forall x \in G,\ E \subseteq G$$ medible.

$$\int_G L_x f \, d\lambda = \int_G f \, d\lambda \qquad \forall x \in G,\ f \in C_c(G)$$

Dado $x \in G$ definimos:

$$\underbrace{\lambda_x : \mathcal{B}}_{\text{conjuntos de Borel de } G} \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$$

En general $\lambda \neq \lambda_x$.
Pero:
$$\begin{aligned} \lambda_x(yE) &= \lambda((yE)x) \\ &= \lambda(y(Ex)) = \lambda(Ex) = \lambda_x(E) \end{aligned}$$

$\therefore$ λ_x es una medida de Haar.
Luego $\exists\ \Delta(x) \in \mathbb{R}_+$ tal que:
$$\lambda_x = \Delta(x)\lambda$$

Definición: $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es llamada la función modular de G.

Si tomamos $c\lambda$ $(c > 0)$, entonces:

$$(c\lambda)_x(E) = c\lambda(Ex) = c\,\lambda_x(E)$$

$$\therefore \quad (c\lambda)_x = \Delta(x)\, c\lambda \qquad \forall\, c>0$$
$$(x \in G)$$

Vemos que:

$$\Delta(xy)\,\lambda(E) = \lambda_{xy}(E)$$
$$= \lambda(Exy) = \lambda_y(Ex)$$
$$= \Delta(y)\,\lambda(Ex) = \Delta(y)\,\lambda_x(E)$$
$$= \Delta(y)\,\Delta(x)\,\lambda(E)$$

(Hemos usado: $\lambda(Ez) = \Delta(z)\,\lambda(E)$)

$$\therefore \quad \Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$$

Corolario: Δ es homomorfismo.

La relación:

$$\lambda(Ey) = \Delta(y)\,\lambda(E)$$

nos dice:

$$\int \chi_{Ey}\, d\lambda = \Delta(y) \int \chi_E\, d\lambda$$

Pero $R_y \chi_E(x) = \chi_E(xy) = \chi_{Ey^{-1}}(x)$

Por tanto:

$$\int \chi_E(xy)\, d\lambda(x) = \int \chi_{Ey^{-1}}(x)\, d\lambda(x)$$

$$= \lambda(Ey^{-1}) = \Delta(y)^{-1}\lambda(E)$$
$$= \Delta(y)^{-1}\int \chi_E(x)\, d\lambda(x)$$

Corolario: $\forall E \subseteq G$ Borel:

$$\int R_y \chi_E \, d\lambda = \int \chi_E(xy)\, d\lambda(x) = \Delta(y)^{-1}\int \chi_E \, d\lambda$$

Por tanto: $\forall f \in C_c(G)$.

$$\int R_y f \, d\lambda = \int f(xy)\, d\lambda(x)$$
$$= \Delta(y)^{-1}\int f(x)\, d\lambda(x)$$

Comparar con:

$$\int L_y f \, d\lambda = \int f \, d\lambda$$

Sea $f_0 \in C_c(G)$ tal que

$$\int f_0 \, d\lambda \neq 0.$$

(E.g, $f_0 \geq 0$ y $f_0 > 0$ en un abierto)

Por tanto:

$$\int R_y f_0 \, d\lambda \neq 0 \quad \forall y \in G.$$

Luego tenemos:

$$\Delta(y) = \frac{\int f_0 \, d\lambda}{\int R_y f_0 \, d\lambda} \qquad \forall y \in G.$$

Corolario: Δ es continuo.

Dem.:

Basta ver que con $f_0 \in C_c(G)$ como arriba el mapeo:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \int R_y f_0 \, d\lambda \end{aligned}$$

es continuo. Pero este es la composición de dos mapeos:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow (C_c(G), \| \ \|_\infty) \\ y &\longmapsto R_y f_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : (C_c(G), \| \ \|_\infty) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \int g \, d\lambda \end{aligned}$$

y sabemos que:

φ es continuo por la continuidad uniforme de f_0

ψ es continuo porque conv. uniforme en compactos $\Longrightarrow$ conv. de integrales. //

Definición:

Un grupo G topológico localmente compacto T_2 se dice unimodular si:

$$\Delta \equiv 1.$$

Es decir: (λ Haar izq.)

$$\lambda(Ex) = \lambda(E) \quad \forall x \in G, \underset{\text{Borel}}{E \subseteq G}.$$

o bien:

Toda medida de Haar es bi-invariante (izq. y der.)

Observaciones:

Si G es Abeliano, entonces es unimodular pues:

$$R_x = L_x \quad \forall x \in G.$$

Si G es compacto, entonces es unimodular pues:

$\Delta(G)$ es subgrupo compacto de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$

$\therefore \Delta(G) = \{1\}.$

De hecho, si G es arbitrario y $K \leq G$ es subgrupo compacto

$\Rightarrow \quad \Delta|_K \equiv 1.$ (Δ modular de G)

Proposición:

Si $G/[G,G]$ es compacto, entonces G es unimodular.

Dem.:

$[G,G]$ es por definición el subgrupo cerrado generado por:

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} \qquad x,y \in G.$$

que es normal.

Δ satisface:

$$\Delta([x,y]) = [\Delta(x),\Delta(y)] = 1$$

$\therefore \ \mathrm{Ker}(\Delta) \supseteq [G,G]$, y se induce un diagrama conmutativo de homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & \mathbb{R}_+ \\
G/[G,G] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

$G/[G,G]$ compacto $\Rightarrow \varphi \equiv 1$

$\Rightarrow \Delta \equiv 1.$

Obs.: Si G es grupo de Lie conexo semisimple, entonces $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ $\therefore$ $[G,G]=G$.

$\therefore$ G es unimodular.

En general, si G es conexo de Lie:

$$\Delta(x)=\det(Ad(x)^{-1})$$

//

Dados G, λ (Haar izq.) hemos considerado:

$$E\longmapsto xE \quad \text{preserva } \lambda$$

$$E\longmapsto Ey \quad \text{aparece } \Delta(y)$$

nos falta:

$$E\longmapsto xEx^{-1} \quad \text{aparece } \Delta(x)^{-1}$$

$$E\longmapsto E^{-1} \quad ??$$

Definimos:

$$\rho:\mathcal{B}\longrightarrow[0,+\infty]$$
$$\rho(E)=\lambda(E^{-1})$$

que es invariante por la derecha:

$$\rho(Ex) = \lambda((Ex)^{-1}) = \lambda(x^{-1}E^{-1})$$
$$= \lambda(E^{-1}) = \rho(E).$$

Prop.: (2.31 en Folland)

$$d\rho(x) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$$

Es decir: $f \in C_c(G)$

$$\int f(x)\, d\rho(x) = \int f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$$

Comparar con:

$$\int f(xy)\, d\lambda(x) = \int f(x)\Delta(y^{-1})\, d\lambda(x).$$

$\longrightarrow$ § Convoluciones.

G tiene producto pero no es espacio de Banach.

$L^1(G)$ es espacio de Banach pero no tiene producto.

Pero prod. en G $\rightsquigarrow$ prod. en $L^1(G)$.

de hecho $\rightsquigarrow$ prod. en $M(G)$

$M(G)$ = medidas de Radon complejas en G.

$$\mu \rightsquigarrow \left(f \longmapsto \int f \, d\mu \right)$$

$$f \in C_0(G)$$

De hecho:

$$M(G) = \left(C_0(G), \| \ \|_\infty \right)^*$$

(ver Folland de Análisis Real, G loc. cpt. T_2)

Además tenemos un mapeo lineal:

$$\begin{aligned} L^1(G) &\longrightarrow M(G) \\ f &\longmapsto \mu_f = f \, d\lambda \end{aligned}$$

donde: $\varphi \in C_0(G)$

$$\int \varphi \, d\mu_f = \int \varphi f \, d\lambda$$

Convolución de medidas:

$\mu, \nu \in M(G)$

Tenemos: $d(\mu \times \nu)(x, y) = d\mu(x) \, d\nu(y)$

+ Fubini...,

que es medida en $G \times G$ (!!)

$\forall \varphi \in C_0(G)$ definimos:

$$\mu * \nu(\varphi) = \iint \varphi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

que define un funcional:

$$C_0(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Pero tenemos:

$$|\mu * \nu(\varphi)| \leq \iint |\varphi(xy)|\, d|\mu|(x)\, d|\nu|(y)$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \|\mu\| \|\nu\|$$

$\therefore$ $\mu * \nu$ es continuo y le corresponde una medida.

Hemos definido:

$$M(G) \times M(G) \longrightarrow M(G)$$
$$(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$$

¿ $L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$? ✓