G loc. compacto T_2, λ Haar izq.

$\mu, \nu \in M(G) = C_0(G)^*$

$$\int \varphi \, d(\mu * \nu) = \iint \varphi(xy) \, d\mu(x) \, d\nu(y)$$

De esta definición:

$$\int \varphi \, d(\mu * (\nu * \sigma)) =$$

$$= \iiint \varphi(xyz) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \, d\sigma(z)$$

$$= \int \varphi \, d((\mu * \nu) * \sigma)$$

También es fácil ver que:

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \ \mu, \nu \in M(G)$$

$$(a\mu) * \nu = a(\mu * \nu)$$

$$\mu * (b\nu) = b(\mu * \nu)$$

si $\sigma \in M(G)$:

$$(\mu + \nu) * \sigma = \mu * \sigma + \nu * \sigma$$

$$\sigma * (\mu + \nu) = \sigma * \mu + \sigma * \nu$$

$\therefore$ $(M(G), *)$ es álgebra de Banach pues:

$$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \, \|\nu\|$$

lo cual se sigue de:

$$|\mu * \nu(\varphi)| = \left| \iint \varphi(xy) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \right|$$

$$\leq \iint |\varphi(xy)| \, d|\mu|(x) \, d|\nu|(y)$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \int_G d|\mu| \int_G d|\nu|$$

$$= \|\varphi\|_\infty \|\mu\| \, \|\nu\|$$

Definimos una involución en $M(G)$:

$$\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})} \quad (*)$$

$\forall \mu \in M(G)$. Por tanto:

$$\int \varphi \, d\mu^* = \int \varphi(x^{-1}) \, d\bar{\mu}(x)$$

pues $(*)$ corresponde a:

$$\int \chi_E \, d\mu^* = \int \chi_E(x^{-1}) \, d\bar{\mu}(x)$$

Debemos probar que:

$$(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$$

y se sigue de:

$$\int \varphi \, d((\mu * \nu)^*) =$$

$$= \int \varphi(x^{-1}) \, d(\overline{\mu * \nu})(x)$$

$$= \iint \varphi((xy)^{-1}) \, d\bar{\mu}(x) \, d\bar{\nu}(y)$$

$$= \iint \varphi(y^{-1}x^{-1}) \, d\bar{\mu}(x) \, d\bar{\nu}(y)$$

$$= \iint \varphi(yx) \, d\mu^*(x) \, d\nu^*(y)$$

$$= \int \varphi \, d(\nu^* * \mu^*)$$

Corolario:

$$(M(G), \| \ \|, *, (\ )^*)$$

es un álgebra de Banach involotiva.

De hecho resta ver:

$$\|\mu^*\| = \|\mu\|$$

$$\|\mu^*\| = |\mu^*|(G)$$

$$= \int_G 1 \, d|\mu^*|(x)$$

$$= \int_G 1 \, d|\bar{\mu}|(x)$$

$$= \int_G 1 \, d|\mu| = \|\mu\|$$

($\mu = \mu_r + i\mu_i$

$|\mu| = (\mu_r)_+ + (\mu_r)_- + (\mu_i)_+ + (\mu_i)_-$)

Hay un mapeo:

$$\delta : G \longrightarrow M(G)$$
$$x \longmapsto \delta_x$$

$$\delta_x(f) = f(x)$$

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Se puede ver que:

$$\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$$

Si G es finito, entonces toda medida en $M(G)$ es de la forma:

$$\sum_{x \in G} c_x \delta_x \quad (c_x \in \mathbb{C})$$

Tenemos:

$$\begin{tikzcd}
M(G)\times M(G) \arrow[r, "*"] & M(G) & f\,d\lambda \\
L^1(G)\times L^1(G) \arrow[u, hook] \arrow[ur] \arrow[r, dashed, "?", "¿*?"'] & L^1(G) \arrow[u, hook] & f \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Si $f, g \in L^1(G)$: $(\varphi \in C_0(G))$

$$(f\,d\lambda) * (g\,d\lambda)(\varphi) =$$

$$= \iint \varphi(yx) f(y)\,d\lambda(y)\, g(x)\,d\lambda(x)$$

$$= \int \left(\int \varphi(yx)\, g(x)\,d\lambda(x) \right) f(y)\,d\lambda(y)$$

$$x \longmapsto y^{-1}x$$

$$= \int \left(\int \varphi(x)\, g(y^{-1}x)\,d\lambda(x) \right) f(y)\,d\lambda(y)$$

$$= \int \varphi(x) \underbrace{\left(\int f(y)\, g(y^{-1}x)\,d\lambda(y) \right)}_{F(x)} d\lambda(x)$$

$$\therefore (f\,d\lambda) * (g\,d\lambda) = F\,d\lambda$$

por tanto definimos:

$$L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$$

$$(f * g)(x) = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, d\lambda(y)$$

De hecho:

$$\int |f * g|(x)\, d\lambda(x) =$$

$$= \int \left| \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, d\lambda(y) \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \int\int |f(y)|\, |g(y^{-1}x)|\, d\lambda(x)\, d\lambda(y)$$

$$= \int \left(\int |g(y^{-1}x)|\, d\lambda(x) \right) |f(y)|\, d\lambda(y)$$

$$= \int \left(\int |g(x)|\, d\lambda(x) \right) |f(y)|\, d\lambda(y)$$

$$= \|f\|_1\, \|g\|_1 < +\infty$$

$$\therefore \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\, \|g\|_1$$

$\therefore$ $(L^1(G), *)$ es álgebra de Banach.

Similarmente:

$$\begin{tikzcd} M(G) \arrow[r, "(\ )^*"] & M(G) \\ L^1(G) \arrow[u, hook] \arrow[ur] \arrow[r, dashed, "?"'] & L^1(G) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Se encuentra ahora:

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\,\Delta(x^{-1})$$

$$f \longleftrightarrow f\,d\lambda \rightsquigarrow (f\,d\lambda)^* \rightsquigarrow \overline{f(x^{-1})}\,d\lambda(x^{-1})$$

$$\hookrightarrow \overline{f(x^{-1})}\,d\rho(x) = \overline{f(x^{-1})}\,\Delta(x^{-1})\,d\lambda(x)$$

Proposición:
$(L^1(G), \|\ \|_1, *, (\ )^*)$ es un álgebra de Banach involutiva.

Resta ver:

$$\|f^*\|_1 = \|f\|_1$$

que se sigue de:

$$\|f\|_1 = \|f\,d\lambda\|$$

Observación: Para G grupo de

Lie en general $L^1(G)$ <u>no</u> es C^*-álgebra:

$$\|f^* * f\|_1 \neq \|f\|_1^2$$

$\longrightarrow$ ¿$L^1(G)$ posee unidad aproximada acotada.

Otras propiedades:

$$f * g(x) = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, d\lambda(y)$$

$$= \int f(xy)\, g(y^{-1})\, d\lambda(y)$$

$$= \int f(y^{-1})\, g(yx)\, \Delta(y^{-1})\, d\lambda(y)$$

$$= \int f(xy^{-1})\, g(y)\, \Delta(y^{-1})\, d\lambda(y)$$

$$f * g(x) = \int f(y)\, L_y g(x)\, d\lambda(y)$$

$$\therefore \quad f * g = \int f(y)\, L_y g\, d\lambda(y)$$

$$G \ni y \longmapsto f(y) L_y g \in L^1(G)$$

Sea G grupo topológico localmente compacto T_2.

Sea $\mathcal{U}$ un sistema fundamental de vecindades de $e \in G$, i.e.:

$\forall\, U \subseteq G$ abierto $\ni e \in U$ $\exists\, V \in \mathcal{U}$ $\ni$:

$$V \subseteq U$$

En particular:

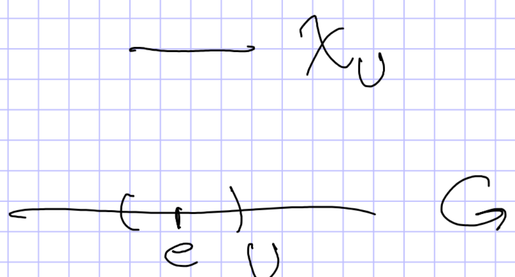
$$\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{U} \;\exists\; V \in \mathcal{U} \ni$$
$$V \subseteq V_1 \cap V_2$$

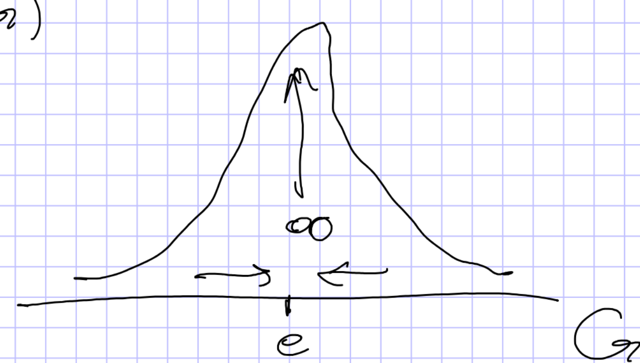
Consideran el orden en $\mathcal{U}$:

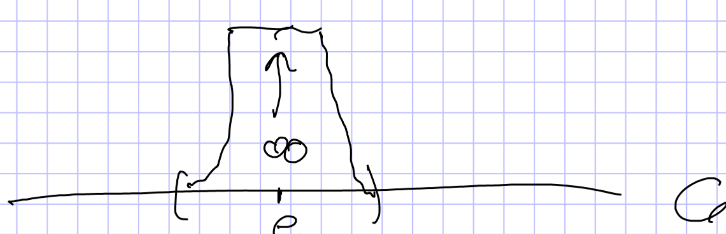
$$V \prec U \iff U \subseteq V$$

$\therefore (\mathcal{U}, \prec)$ es red.

Queremos $\forall\, U \in \mathcal{U}$ un $\varphi_U \in L^1(G)$ $\ni$ $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ es unidad aproximada en $L^1(G)$







$\forall U \in \mathcal{U}$ sea $\varphi_U : G \longrightarrow [0, +\infty)$ continua tal que:

supp $\varphi_U \subseteq U$ y es compacto.

$$\int_G \varphi_U = 1$$

Prop. (2.44 de Folland)

$$\|\varphi_U * f - f\|_1 \xrightarrow[U \to e]{} 0 \quad \forall f \in L^1(G)$$

Si además $\varphi_U(x^{-1}) = \varphi_U(x)$ $\forall x \in G$, entonces:

$$\|f * \varphi_U - f\|_1 \xrightarrow[U \to e]{} 0 \quad \forall f \in L^1(G).$$

Obs.: Si φ es arbitraria, entonces:

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) + \varphi(x^{-1})$$

y se cumple $\varphi_0(x^{-1}) = \varphi_0(x)$.

Representaciones de $L^1(G)$ a partir de G:

$$\pi : G \times H \longrightarrow H$$

unitaria en H de Hilbert.

Entonces tenemos:

$$\pi : L^1(G) \longrightarrow B(H)$$

$$\pi(f) : H \longrightarrow H$$

$$\pi(f)v = \int_G f(x)\,\pi(x)\,v \, d\lambda(x)$$

Comparar con:

$$f * g = \int f(x)\, L_x g \, d\lambda(x)$$