

Las ecuaciones de Sturm–Liouville y operadores compactos auto-adjuntos, 1

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela de Matemáticas Aplicadas
6–9 de abril de 2026

- ◇ Consideramos una cuerda fija en sus extremos, sujeta a vibración en forma de onda.
- ◇ El desplazamiento de la cuerda se mide con una función $u(t, x)$ que depende del tiempo t y de la posición x a lo largo de la cuerda.
- ◇ La velocidad de propagación de la onda se denota por c .
- ◇ Entonces, la función u satisface la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

donde $(t, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$.

- ◇ Los extremos fijos dan lugar a las condiciones de frontera

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0,$$

para todo tiempo t .

- ◇ La ecuación de onda se puede factorizar

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0.$$

- ◇ Esto sugiere considerar las ecuaciones

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0.$$

- ◇ Si $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, entonces la ecuación de onda se puede resolver como

$$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

- ◇ Resolvemos la ecuación de onda aplicando separación de variables. Suponemos la descomposición $u(t, x) = w(t)y(x)$.
- ◇ Calculamos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{1}{c^2} w''(t)y(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(t, x) = w(t)y''(x)$$

- ◇ En este caso, la ecuación de onda es equivalente a

$$\frac{1}{c^2} \frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)},$$

para todo (t, x) .

- ◇ Es decir, existe una constante $-\lambda$ tal que

$$-\frac{1}{c^2} w''(t) = \lambda w(t), \quad -y''(x) = \lambda y(x).$$

- ◇ La condición de frontera corresponde a $y(0) = y(1) = 0$.

- ◇ Suponemos que u, w, y toman valores reales.
- ◇ La condición de frontera implica suponer que $\lambda > 0$. ¿Porqué?
- ◇ La solución general de las ecuaciones es

$$w(t) = c_1 \cos(c\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(c\sqrt{\lambda}t),$$

$$y(x) = c_3 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_4 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

- ◇ Las condiciones de frontera implican

$$y(0) = 0 \implies c_3 = 0,$$

$$y(1) = 0 \implies \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\implies \lambda = (n\pi)^2, \text{ con } n \in \mathbb{Z}_+.$$

- ◇ Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, obtenemos la solución

$$u(t, x) = (c_1 \cos(cn\pi t) + c_2 \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x)$$

- ◇ La ecuación de onda es lineal. Por tanto, las funciones

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^N (c_{1,n} \cos(cn\pi t) + c_{2,n} \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x)$$

son también solución para todo $N \in \mathbb{Z}_+$. Más aún, tenemos:

Teorema

Si se cumplen $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |c_{1,n}| < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |c_{2,n}| < +\infty$, entonces la función

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{1,n} \cos(cn\pi t) + c_{2,n} \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x)$$

pertenece a $C^2(\mathbb{R} \times [0, 1])$ y resuelve la ecuación de onda con condición inicial $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

- ◇ Estudiamos ecuaciones diferenciales ordinarias similares a las que aparecen con la ecuación de onda.
- ◇ Para funciones y definidas en $[a, b]$ consideramos

$$(Ly)(x) = \lambda y(x), \quad L = \frac{1}{r(x)} \left(- \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right),$$

para funciones dadas (y fijas) r, p, q , con condiciones de frontera

$$\cos(\alpha)y(a) = \sin(\alpha)p(a)y'(a), \quad \cos(\beta)y(b) = \sin(\beta)p(b)y'(b),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son dados.

- ◇ Este es llamado el Problema con Valores Frontera de Sturm–Liouville.

- ◇ Siguiendo los métodos empleados para la ecuación de onda, el problema de Sturm–Liouville se puede atacar como sigue.
- ◇ En el espacio de funciones $C^2([a, b])$
 - ▶ Determinar los valores λ para los cuales existe $y \neq 0$ tal que $Ly = \lambda y$. Problema de valores propios.
 - ▶ Para cada λ del paso anterior, determinar todas las soluciones y de la ecuación $Ly = \lambda y$. Problema de vectores propios.
 - ▶ Mediante series, superponer las soluciones obtenidas en el paso anterior para obtener funciones más generales. Problema de bases que consisten de vectores propios.
- ◇ Lo anterior es similar a los problemas de álgebra lineal, con algunas diferencias importantes.
 - ▶ Trabajamos en un espacio de funciones que es, por tanto, de dimensión infinita.
 - ▶ Es necesario introducir geometría como la observada en \mathbb{C}^n .
 - ▶ Debemos asegurar que solamente hay una cantidad contable de valores propios.
 - ▶ Es necesario trabajar con límites en espacios de funciones.

- ◇ Necesitamos sistematizar el uso de espacios de funciones para estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias.
- ◇ El teorema enunciado antes hace uso de convergencia uniforme.
- ◇ La convergencia uniforme se maneja de manera más eficiente en espacios de funciones.

- ◇ La convergencia uniforme se puede definir geoméricamente.
- ◇ Para funciones en $C([a, b])$, recordamos lo siguiente.

- ▶ Son equivalentes.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ puntualmente para $x \in [a, b]$,
- para todo $x \in [a, b]$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ cuando $n \geq N$.

- ▶ Son equivalentes.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ uniformemente en $[a, b]$,
- para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$ cuando $n \geq N$.

- ◇ Se introduce una norma en $C([a, b])$ que define la convergencia uniforme.

- ▶ $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ uniformemente $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

- ◇ Es posible definir normas que involucren derivadas.
- ◇ Para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ el espacio $C^k([a, b])$ tiene una norma natural.

$$\blacktriangleright \|f\|_{C^k} = \sup_{x \in [a, b], j=0, \dots, k} |f^{(j)}(x)|.$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{C^k} = 0 \iff (f_n^{(j)})_n \text{ converge uniformemente a } f^{(j)} \text{ para todo } j = 0, \dots, k.$$

- ◇ Sabemos que $C([a, b])$ y $C^k([a, b])$ con las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_{C^k}$ son espacios de Banach. Es decir, espacios normados en los que toda sucesión de Cauchy converge (son completos).
- ◇ Sin embargo, estos espacios normados tienen un “defecto”: su norma no proviene de un producto interno.
- ◇ La geometría de estos espacios normados difiere de manera importante de la geometría de \mathbb{C}^n .

- ◇ Recordamos algunos aspectos de álgebra lineal.
- ◇ Dada $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ transformación u operador lineal.
 - ▶ $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A si existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. En este caso, v es un vector propio asociado a λ .
 - ▶ λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$.
 - ▶ A se dice auto-adjunto (Hermitiano o simétrico) si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes
 - $A^* = A$,
 - $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{C}^n$,
 - ▶ Cuando A es auto-adjunto se cumplen
 - los valores propios de A son reales,
 - A tiene n valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ contando multiplicidades,
 - si v_1, v_2 son vectores propios asociados a valores propios $\lambda_{j_1} \neq \lambda_{j_2}$, entonces $v_1 \perp v_2$,
 - existe una base unitaria v_1, \dots, v_n de \mathbb{C}^n que consiste de vectores propios,
 - $U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $U = (v_1, \dots, v_n)$ es unitaria (las columnas de U son v_1, \dots, v_n) y $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es diagonal.

- ◇ Resolver los siguientes problemas.
- ① Si $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un operador lineal, entonces A posee n valores propios contando multiplicidades. Dar un ejemplo para el cual ninguno de los valores propios es real.
- ② Si $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un operador lineal auto-adjunto con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, entonces

$$|\lambda_1| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n, \|v\|=1} \|Av\|,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma de \mathbb{C}^n .