

Las ecuaciones de Sturm–Liouville y operadores compactos auto-adjuntos, 2

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela de Matemáticas Aplicadas
6–9 de abril de 2026

- ◇ En el espacio $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ existen sucesiones de Cauchy que no convergen (no es completo).
- ◇ Ejemplo: Para $a = 0, b = 2$ y $r \equiv 1$, tomamos $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ n(x - 1) + 1 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}, \\ 2 & \text{si } 1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 2, \end{cases}$$

- ◇ Ninguno de los espacios $(C^k([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ es completo.

- ◇ La incompletitud de $(C^k([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ es similar a la incompletitud de los racionales \mathbb{Q} .
- ◇ Es necesario agregar funciones a $C^k([a, b])$ para obtener un espacio completo.
- ◇ Definimos $L_r^2([a, b])$ como el espacio de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen la siguiente condición
 - ▶ existe una sucesión de funciones $(f_n)_n \subset C([a, b])$ tales que
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ puntualmente,
 - $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|f_n - f_m\|_2 = 0$,
- ◇ y con sucesiones correspondientes se define

$$\langle f, g \rangle_r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) \overline{g_n(x)} r(x) dx.$$

- ◇ Un estudio detallado de los espacios $L_r^2([a, b])$ requiere la teoría de integración de Lebesgue.

- ◇ Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo \mathcal{H} con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que la norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

es completa (define un espacio de Banach).

- ◇ Ejemplos: \mathbb{C}^n y $L_r^2([a, b])$.

- ◇ Deseamos estudiar el operador

$$L = \frac{1}{r(x)} \left(- \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right)$$

en el espacio $L_r^2([a, b])$.

- ◇ Se puede ver que $C^2([a, b]) \subsetneq L_r^2([a, b])$, de modo que L no se puede aplicar a todos los elementos de $L_r^2([a, b])$.
- ◇ Sin embargo, tenemos

Teorema

El subespacio $C^k([a, b])$ es denso en $L_r^2([a, b])$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- ◇ L es un operador lineal en $L_r^2([a, b])$ densamente definido.

- ◇ Nos preguntamos si la identidad

$$\langle Lf, g \rangle_r = \langle f, Lg \rangle_r$$

se cumple para L y para funciones f, g en su dominio.

- ◇ El término auto-adjunto se reserva para operadores definidos en todo el espacio de Hilbert.
- ◇ En el caso de operadores densamente definidos el término correcto es simétrico.
- ◇ Pregunta: ¿ L es simétrico?

- ◇ Claramente, tenemos

$$\int_a^b q(x)f(x)\overline{g(x)}r(x) dx = \int_a^b f(x)\overline{q(x)g(x)}r(x) dx$$

porque q toma valores reales.

- ◇ Resta considerar la parte diferencial de L .

- ◇ Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
 & - \int_a^b \frac{1}{r(x)} \left(\frac{d}{dx} p(x) \frac{df}{dx}(x) \right) \overline{g(x)} r(x) dx = \\
 & = - \int_a^b (pf')' \overline{g} \\
 & = - (pf' \overline{g})(x) \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b pf' \overline{g}' \\
 & = - (pf' \overline{g})(x) \Big|_{x=a}^{x=b} + (pf \overline{g}')(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f (\overline{pg}')' \\
 & = W_p(f, \overline{g})(b) - W_p(f, \overline{g})(a) \\
 & \quad - \int_a^b \frac{1}{r(x)} f(x) \overline{\left(\frac{d}{dx} p(x) \frac{dg}{dx}(x) \right)} dx,
 \end{aligned}$$

donde $W_p(f, g) = pfg' - pf'g$ es el (p -)Wronskiano (modificado) de f, g .

- ◇ Concluimos que

$$\langle Lf, g \rangle_r = W_p(f, \bar{g})(b) - W_p(f, \bar{g})(a) + \langle f, Lg \rangle_r$$

si $f, g \in C^2([a, b])$.

- ◇ Denotamos

$$BC(y)(a) = \cos(\alpha)y(a) - \sin(\alpha)p(a)y'(a)$$

$$BC(y)(b) = \cos(\beta)y(b) - \sin(\beta)p(b)y'(b)$$

de modo que las condiciones de frontera del Problema de Sturm–Liouville son

$$BC(y)(a) = BC(y)(b) = 0.$$

- ◇ Es fácil ver que si f, g cumplen estas condiciones, entonces

$$W_p(f, \bar{g})(a) = W_p(f, \bar{g})(b) = 0.$$

- ◇ Consideramos el espacio

$$\mathcal{H}_0 = \{f \in C^2([a, b]) : BC(f)(a) = BC(f)(b) = 0\}.$$

- ◇ Entonces, hemos probado que

$$\langle Lf, g \rangle_r = \langle f, Lg \rangle_r,$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}_0$. Es decir, L es simétrico en el subespacio denso \mathcal{H}_0 .

◇ Resolver los siguientes problemas.

- ① Para una función $p \in C([a, b])$ con valores reales considere las funciones

$$BC(f)(a) = \cos(\alpha)f(a) - \sin(\alpha)p(a)f'(a)$$

$$BC(f)(b) = \cos(\beta)f(b) - \sin(\beta)p(b)f'(b).$$

Probar que el conjunto

$$BC([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \in C^1, BC(f)(a) = BC(f)(b) = 0\},$$

es un espacio vectorial complejo (con las operaciones usuales de funciones) cerrado bajo conjugación (es decir, $f \in BC([a, b])$ implica $\bar{f} \in BC([a, b])$). Probar que si $f, g \in BC([a, b])$ entonces el Wronskiano modificado definido como

$$W_p(f, g) = pfg' - pf'g,$$

se anula en a y en b .

- 2 Considere la norma $\|\cdot\|_2$ definida mediante integración en los espacios $C^k([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$. Defina la sucesión de funciones

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = x^n.$$

Probar las siguientes afirmaciones.

- ▶ $f'_n = n f_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ (considere $f_0 \equiv 1$).
- ▶ Calcular $\|f_n\|_2 = 1/\sqrt{2n+1}$ y concluir que $(f_n)_n$ converge a la función 0 en $L^2([0, 1])$.
- ▶ Calcular la sucesión $(\|f'_n\|_2)_n$ y probar que converge a infinito.

Concluir que el operador lineal $f \mapsto f'$ NO es continuo cuando se considera como transformación $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$. En particular, la derivación de funciones no puede extenderse a un operador continuo en $L^2([0, 1])$.