

Las ecuaciones de Sturm–Liouville y operadores compactos auto-adjuntos, 3

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela de Matemáticas Aplicadas
6–9 de abril de 2026

- ◇ Analizamos el comportamiento de ciertos operadores lineales en espacios de Hilbert.
- ◇ Fijamos un espacio de Hilbert (complejo) \mathcal{H} con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- ◇ El espacio \mathcal{H} posee una base de Hamel: una familia $(v_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ para cada $v \in \mathcal{H}$ existe una única expresión de la forma

$$v = \sum_{k=1}^{n(v)} c_k v_{j_k}$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ y $n(v) \in \mathbb{N}$ depende, en principio, de v .

- ◇ Si \mathcal{H} es de dimensión finita n , entonces podemos escoger $n(v) = n$ para todo $v \in \mathcal{H}$.
- ◇ En el caso de dimensión infinita, las bases de Hamel son demasiado grandes.

- ◇ En el caso de dimensión infinita es más adecuado considerar límites, es decir, series en lugar de sumas.
- ◇ Una base (unitaria) del espacio de Hilbert \mathcal{H} es una familia $(u_j)_{j \in J}$ que satisface
 - ▶ $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$ para todo $j, k \in J$,
 - ▶ para cada $v \in \mathcal{H}$

$$v = \sum_{j \in J} \langle v, u_j \rangle u_j$$

en el sentido de un límite en \mathcal{H} cuando J es infinito.

- ◇ Consideramos espacios de Hilbert \mathcal{H} de dimensión infinita para los cuales podemos escoger $J = \mathbb{Z}_+$ o \mathbb{Z} . Es decir, espacios de Hilbert separables.
- ◇ La segunda condición se reduce a

$$v = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle v, u_j \rangle u_j,$$

lo cual considera una serie como un límite en \mathcal{H} .

- ◇ En el espacio de Hilbert $L^2([0, 1])$, una base es dada por las funciones

$$u_k(x) = e^{2\pi i k x},$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

- ◇ El problema de expresar una función en $L^2([0, 1])$ como serie en términos de esta base es parte del análisis de Fourier.

- ◇ Consideramos operadores lineales

$$A : D(A) \rightarrow \mathcal{H},$$

donde $D(A)$ es un subespacio denso de \mathcal{H} . A se dice densamente definido.

- ◇ Un valor propio de A es $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual existe $v \in D(A) \setminus \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. Es decir, $A - \lambda I$ no es inyectivo.
- ◇ En dimensión infinita, existen operadores lineales sin valores propios.
- ◇ Ejemplo: En $L^2([0, 1])$ el operador A dado por

$$(Af)(x) = xf(x),$$

para todo $x \in [0, 1]$, no posee valores propios.

- ◇ En dimensión infinita, es necesario imponer condiciones para asegurar la existencia de valores propios.
- ◇ Si \mathcal{H} es de dimensión infinita, entonces existen operadores lineales discontinuos. Por ejemplo, construidos como sigue
 - ▶ sea $(u_j)_{j=1}^{+\infty}$ una base de \mathcal{H} ,
 - ▶ completamos esta base a una base de Hamel $S \subset \mathcal{H}$,
 - ▶ escogemos una sucesión $(c_j)_j \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que
$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |c_j|^{-1} = 0,$$
 - ▶ definimos

$$A(u) = \begin{cases} c_j u_j & \text{si } u = u_j, \\ 0 & \text{si } u \neq u_j, \text{ para todo } j, \end{cases}$$

y extendemos por linealidad,

- ▶ vemos que $\lim_{j \rightarrow +\infty} c_j^{-1} u_j = 0$, pero $A(c_j^{-1} u_j) = u_j$ que tiene norma constante 1.

- ◇ Para un operador lineal en $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ las siguientes condiciones son equivalentes
 - ▶ A es continuo en \mathcal{H} ,
 - ▶ A es continuo en 0 ,
 - ▶ si $S \subset \mathcal{H}$ es acotado, entonces $A(S)$ es acotado en \mathcal{H} ,
 - ▶ $\|A\| = \sup_{v \in \mathcal{H}, \|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{v \in \mathcal{H}, \|v\|=1} \|Av\| < +\infty$,
 - ▶ existe una constante $C > 0$ tal que $\|Av\| \leq C\|v\|$ para todo $v \in \mathcal{H}$.
- ◇ Cuando esto ocurre decimos que el operador es acotado y en este caso se cumple

$$\|Av\| \leq \|A\|\|v\|,$$

para todo $v \in \mathcal{H}$.

- ◇ Incluso la continuidad de un operador no garantiza la existencia de valores propios.
- ◇ El operador $(Af)(x) = xf(x)$ es acotado con norma $\|A\| = 1$.
- ◇ Los espacios de Hilbert de dimensión infinita tienen comportamiento muy distinto del de \mathbb{C}^n .
- ◇ Si el espacio de Hilbert \mathcal{H} tiene una base $(u_j)_{j=1}^{+\infty}$, entonces
 - ▶ $\|u_j - u_k\|^2 = 2$ cuando $j \neq k$ (desarrollar producto interno),
 - ▶ el conjunto $(u_j)_j$ no tiene subsucesión convergente,
 - ▶ la bola $B(0, M) = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| < M\}$ tiene cerradura no compacta,
 - ▶ un conjunto cerrado y acotado en \mathcal{H} no es necesariamente compacto.
- ◇ Por lo anterior, si $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador acotado, entonces
 - ▶ $A(B(0, M))$ es acotado, pero no necesariamente es de cerradura compacta,
 - ▶ si $(v_n)_n \subset \mathcal{H}$ es una sucesión acotada, entonces $(A(v_n))_n$ es acotada pero no necesariamente posee subsucesiones convergentes.

- ◇ Un operador lineal $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se dice compacto si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes
 - ▶ si $(v_n)_n$ es una sucesión acotada, entonces $(A(v_n))_n$ posee una subsucesión convergente,
 - ▶ para todo $M > 0$, el conjunto $A(B(0, M))$ tiene cerradura compacta,
 - ▶ si $C \subset \mathcal{H}$ es acotado, entonces $A(C)$ tiene cerradura compacta.
- ◇ Todo operador compacto es acotado.
- ◇ Los operadores compactos presentan un mejor comportamiento respecto del problema de valores propios.
- ◇ Recordamos: un operador A se dice auto-adjunto cuando

$$\langle A(u), v \rangle = \langle u, A(v) \rangle,$$

para todo u, v .

Teorema

Sea $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador compacto auto-adjunto. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades.

- ◇ El conjunto de valores propios distintos de A forma una sucesión $(\lambda_j)_{j=1}^N$ (no vacía), donde $N \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$.
- ◇ Cuando tal sucesión es infinita, i.e. $N = +\infty$, se cumple $\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda_j = 0$.
- ◇ $\|A\| = \sup_{j=1, \dots, N} |\lambda_j|$.
- ◇ Si para cada j denotamos con E_j el espacio de vectores propios asociados a λ_j , entonces
 - ▶ $E_j \perp E_k$ cuando $j \neq k$, y $\ker(A) \perp E_j$ para todo j .
 - ▶ $\dim E_j < +\infty$ para todo j .
- ◇ La cerradura de $A(\mathcal{H})$ posee una base que consiste de vectores propios.

◇ Resolver los siguientes problemas.

- ① Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert con base $(v_j)_{j=1}^{+\infty}$ (en particular, \mathcal{H} es de dimensión infinita). Defina los operadores lineales $L, R : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ por

$$L(v) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_{j+1} v_j, \quad R(v) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j v_{j+1},$$

donde $v = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j v_j$ es la expresión de v en términos de la base

dada. Probar las siguientes afirmaciones.

- ▶ L es suprayectivo, pero no es inyectivo.
- ▶ R es inyectivo, pero no es suprayectivo.

- 2 Sea $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$ una función tal que $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ para cualesquiera $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Defina $T_K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ por

$$(T_K(f))(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy.$$

- ▶ Probar que T_K es un operador lineal.
- ▶ Utilizando el Teorema de Fubini probar que T_K es simétrico, es decir, se satisface

$$\langle T_K(f), g \rangle = \langle f, T_K(g) \rangle,$$

para cualesquiera $f, g \in C([0, 1])$.

- ▶ (Opcional. Puede utilizar resultados conocidos de teoría de Lebesgue o teoría de la medida) T_K define un operador lineal compacto en $L^2([0, 1])$.