Las ecuaciones de Sturm–Liouville y operadores compactos auto-adjuntos, 4

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela de Matemáticas Aplicadas
6–9 de abril de 2026

- Retomamos el estudio de la ecuación

$$(Ly)(x) = \lambda y(x), \quad L = \frac{1}{r(x)}\left(- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + q(x) \right),$$

definida en $C^2([a, b])$ y con condiciones iniciales

$$BC(y)(a) = \cos(\alpha) y(a) - \sin(\alpha) p(a) y'(a) = 0,$$
$$BC(y)(b) = \cos(\beta) y(b) - \sin(\beta) p(b) y'(b) = 0,$$

que llamaremos condiciones BC.

- Esto hace de L un operador densamente definido en $L^2_r([a, b])$ con dominio

$$\mathcal{H}_0 = \{f \in C^2([a, b]) : BC(f)(a) = BC(f)(b) = 0\}.$$

- Hemos probado que L es simétrico

$$\langle Lf, g \rangle_r = \langle f, Lg \rangle_r,$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}_0$.

- Deseamos resolver los problemas asociados a las nociones de valores y vectores propios.
- Afirmación: Los valores propios de L son reales.
  - Si $Lu = \lambda u$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda\|u\|_2^2 &= \langle \lambda u, u\rangle_r = \langle Lu, u\rangle_r \\ &= \langle u, Lu\rangle_r = \langle u, \lambda u\rangle_r = \overline{\lambda}\|u\|_2^2.\end{aligned}$$

- Afirmación: Si u_1, u_2 son vectores propios asociados a valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $u_1 \perp u_2$.
  - Calculamos

$$\begin{aligned}\lambda_1\langle u_1, u_2\rangle_r &= \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle_r = \langle Lu_1, u_2\rangle_r \\ &= \langle u_1, Lu_2\rangle_r = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle_r = \lambda_2\langle u_1, u_2\rangle_r.\end{aligned}$$

- Preguntas: ¿Existen valores propios para L?
  En caso positivo, ¿cuántos valores propios puede tener L?
  ¿podemos formar bases con vectores propios?

- Deseamos determinar los valores $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $L - zI$ no es inyectivo en $\mathcal{H}_0$ o, equivalentemente, los valores $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $L - zI$ es inyectiva en $\mathcal{H}_0$.
- En este último caso, podremos hallar la inversa $(L - zI)^{-1}$ que se obtiene al resolver en f la ecuación

$$(L - zI)f = g,$$

para una g adecuada.
- Conclusión: debemos resolver las ecuaciones
  - (homogénea) $(L - zI)y = 0$,
  - (inhomogénea) $(L - zI)f = g$.

- La ecuación diferencial homogénea es

$$-\left(py'\right)' + (q - zr)y = 0. \tag{SL}$$

- En lo sucesivo suponemos que
  - $p, q, r : [a, b] \to \mathbb{R}$,
  - $p, r > 0$,
  - q, r son continuas y p es de clase C^1.

- Con la substitución $w(x) = p(x)y'(x)$, la ecuación diferencial de segundo orden es equivalente al siguiente sistema lineal de primer orden

$$\begin{pmatrix} y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - zr & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}. \tag{SL matricial}$$

- Denotamos

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(x)} \\ q(x) - zr(x) & 0 \end{pmatrix}$$

para $x \in [a, b]$.

- La función matricial A define el sistema lineal.

- Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales lineales existen soluciones únicas

$$c, s : \mathbb{C} \times [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$$

tales que la matriz principal de solución dada por

$$\Pi : \mathbb{C} \times [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\Pi(z, x, x_0) = \begin{pmatrix} c(z, x, x_0) & s(z, x, x_0) \\ p(x)c'(z, x, x_0) & p(x)s'(z, x, x_0) \end{pmatrix},$$

satisface

$$\Pi(z, x_0, x_0) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matriz principal de solución resuelve (SL matricial) con condición inicial $\varphi(x_0) = v \in \mathbb{C}^2$ mediante la fórmula

$$\varphi(x) = \Pi(z, x, x_0)v.$$

- También resuelve (SL) con condición inicial

$$y(x_0) = c_1, \quad p(x_0)y'(x_0) = c_2,$$

tomando $y = \varphi_1$ (primer componente de φ) para $v = (c_1, c_2)^\top$ (vector columna).

- Consideramos ahora la ecuación inhomogénea

$$-(py')' = -(q - zr)y + gr. \qquad \text{(SL inhomogénea)}$$

- Los coeficientes de Π proporcionan la siguiente solución con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0)c(z, x, x_0) + f'(x_0)p(x_0)s(z, x, x_0) \\ - \int_{x_0}^{x} s(z, x, t)g(t)r(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

- El siguiente paso es encontrar soluciones que satisfagan las condiciones de frontera BC.

- Dadas u, v dos soluciones de (SL) linealmente independientes, consideramos el Wronskiano

$$W_p(z,u,v) = puv' - pu'v.$$

- La función W_p satisface la identidad de Abel

$$\begin{aligned} W_p(z,u,v)(x) &= W_p(u.v)(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} tr(A(t))\,\mathrm{d}t\right) \\ &= W_p(z,u,v)(x_0), \quad \big(tr(A(t) = 0\big) \end{aligned}$$

  es decir $W_p(z,u,v)(x) = W_p(z)$ depende solamente del parámetro $z \in \mathbb{C}$.

- Más aún, $W_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera (analítica compleja en todo $\mathbb{C}$).

- Por unicidad (con condiciones iniciales)

$$c(z,x,x_0) = \frac{u(z,x)p(x_0)v'(z,x_0) - p(x_0)u'(z,x_0)v(z,x)}{W_p(z)}$$

$$s(z,x,x_0) = \frac{u(z,x)v(z,x_0) - u(z,x_0)v(z,x)}{W_p(z)}$$

- La solución general (SL inhomogénea) en términos de u, v es

$$f(x) = \frac{u(z,x)}{W_p(z)}\left(c_1 + \int_a^x v(z,t)g(t)r(t)\,\mathrm{d}t\right) + \frac{v(z,x)}{W_p(z)}\left(c_2 + \int_x^b u(z,t)g(t)r(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- Problema: Hallar u, v y c_1, c_2 tal que f satisfaga las condiciones de frontera

$$BC(f)(a) = BC(f)(b) = 0.$$

- La única obstrucción para hallar u, v y c_1, c_2 es $W_p(z) = 0$.
- Dada $g \in L^2_r([a, b])$, existe una única $f \in \mathcal{H}_0$ tal que

$$(L - zI)f = g$$

  si y sólo si $W_p(z) \neq 0$. Es decir, $L - zI : \mathcal{H}_0 \to L^2_r([a, b])$ se puede invertir precisamente cuando $W_p(z) \neq 0$.
- Esto permite concluir que $z \in \mathbb{C}$ es valor propio de L (i.e. $L - zI$ no es inyectiva) si y sólo si $W_p(z) = 0$.
- El conjunto de ceros de una función entera es discreto en $\mathbb{C}$. Por tanto, el conjunto de valores propios de L es discreto (y contenido en $\mathbb{R}$).

- Sea $z \in \mathbb{R}$ no valor propio de L. Por ejemplo, $z \in \mathbb{R}$ tal que $W_p(z) \neq 0$.
- Por lo anterior, existe un operador lineal $R(L, z) : L^2_r([a, b]) \to \mathcal{H}_0$ tal que

$$(L - zI)R(L, z)g = g$$

para toda g.

- El operador $R(L,z)$ resulta ser compacto y auto-adjunto.
- Podemos concluir
  - Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de $R(L,z)$ con vector propio g, entonces

$$\begin{aligned} g &= (L - zI)R(L,z)g = (L - zI)\lambda g \\ \implies Lg &= \left(z + \frac{1}{\lambda}\right)g. \end{aligned}$$

  - Por tanto, L posee valores propios. Más aún, todo vector propio de $R(L,z)$ (de valor propio $\neq 0$) es vector propio de L.
  - Existe una base de vectores propios de L para la cerradura de su dominio $\mathcal{H}_0$.
- Hemos completado la solución al problema de valores y vectores propios para el operador L.

- Resolver los siguientes problemas.

1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $V \subset \mathcal{H}$ de dimensión finita. Probar las siguientes afirmaciones.
    - (Opcional, pero lo puede usar en los siguientes puntos) Probar que existe una base unitaria $(u_j)_{j=1}^{+\infty}$ tal que $u_1, \dots, u_n$ es base de V ($n = \dim V$).
    - Usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathcal{H}$ (i.e.: para todo $u, v \in \mathcal{H}$ se cumple $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$) para probar que si $(u_k)_k$ es una sucesión que converge a u en $\mathcal{H}$, entonces
    $$\lim_{k \to +\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle, \qquad \text{para todo } v \in \mathcal{H}.$$
    - Usar el inciso anterior para probar que si $(u_k)_k$ es una sucesión de elementos de V que converge a un elemento en $u \in \mathcal{H}$, entonces $u \in V$. Concluir que V es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

2. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert de dimensión finita. Probar que existe una transformación lineal biyectiva $A : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$, para algún entero positivo n, tal que
$$(Au) \cdot (Av) = \langle u, v \rangle,$$
para todo $u, v \in \mathcal{H}$, donde $z \cdot w$ denota el producto Hermitiano usual para elementos $z, w \in \mathbb{C}^n$.
3. (Opcional) Sea $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal tal que $A(\mathcal{H})$ es de dimensión finita. Probar que A es un operador compacto. (Sugerencias: Usar los ejercicios anteriores. Considere el complemento ortogonal del núcleo de A.)