Espacios de Bergman $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$
Operadores de Toeplitz:

$$L^\infty(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D}))$$
$$a \longmapsto T_a^{(\lambda)} = T_a$$

Comparar:

Física en $\mathbb{R}^3$:

Clásica (Newton) $\quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = T^*\mathbb{R}^3$
$\qquad\qquad\qquad\quad x \qquad v$

Se estudia o mide a través de funciones:

$$T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

E.g.:

$$(x,v) \longmapsto x_1, \text{ ó } x_j$$
$$(x,v) \longmapsto v_2, \text{ ó } v_j$$
$$(x,v) \longmapsto \frac{1}{2} m |v|^2$$
$$(x,v) \longmapsto H(x,v)$$
energía.

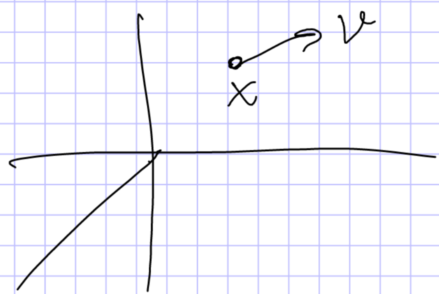
Ecuaciones:

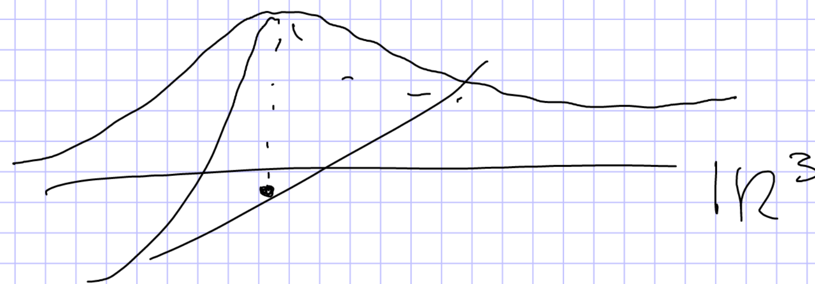
$$F = ma$$
$$F(x) = m\frac{dv}{dt}$$

Moderna ó Cuantica:

Partículas:

Clásico: Cuántico:





$(x,v) \in T^*\mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\left(\int |f|^2 = 1 \right)$$

$\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ espacio de partículas o estados.

Cantidades Físicas:

1a posibilidad: (no cuántico)

funcionales (lineales o no)

$$L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{C}$$

2da posibilidad:

Operadores:

$$L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$$

Por ejemplo:

posición: $f(x) \longmapsto x_j f(x)$
(j-coord)

velocidad: $f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$
(j-coord).

solamente definidos densamente y no acotados.

Clásica a Cuántica:

$a \rightsquigarrow T_a$

Cuántica a Clásica:

$T \rightsquigarrow a = \widetilde{T}$

En Clásica:

medir $f(x,v)$ y luego $g(x,v)$

ó medir $g(x,v)$ y luego $f(x,v)$

son lo mismo.

En Cuántica:

$f \in L^2(\mathbb{R}^3)$

T_1, T_2 operadores que miden propiedades físicas.

mido T_1 y luego T_2:

$$f \xmapsto{T_1} T_1 f \xmapsto{T_2} T_2 T_1 f$$

mido T_2 y luego T_1:

$$f \xmapsto{T_2} T_2 f \xmapsto{T_1} T_1 T_2 f$$

son iguales

$$\Longleftrightarrow \quad [T_1, T_2] f = 0$$

Hay una correspondencia:

$$[T_1, T_2] \longleftrightarrow \{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\}$$

"corchetes de Poisson"

aproximada solamente.

$\longrightarrow$ En operadores de Toeplitz

$$[T_a^{(\lambda)}, T_b^{(\lambda)}] = 0 \quad \forall \lambda$$

$$\Longrightarrow \{a, b\} = 0.$$

$\longrightarrow$ Además veremos moment maps o mapeos de momento.

$H \leq G = Aut(D)$, D dominio simétrico acotado.

$$L^\infty(D)^H = \{ a \in L^\infty(D) \mid a \circ h = a \quad \forall h \in H \}$$

Con $D = \mathbb{B}^n$:

H subgrupo maximal Abeliano (MASG) , $a, b \in L^\infty(D)^H$

$$\Longrightarrow \quad [T_a^{(\lambda)}, T_b^{(\lambda)}] = 0 \quad \forall \lambda$$

H conexo Abeliano (maximal o no)

$H \rightsquigarrow L^\infty(\mathbb{B}^n)_\mu$, μ moment map

$\forall a, b \in L^\infty(\mathbb{B}^n)_\mu$:

$$[T_a^{(\lambda)}, T_b^{(\lambda)}] = 0 \quad \forall \lambda$$

Y con H MASG:

$$L^\infty(\mathbb{B}^n)_\mu = L^\infty(\mathbb{B}^n)^H$$