Más propiedades de espacios Lagrangianos:

*) Tomamos $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ Lagrangiano, y sea:

$$\Lambda' = J_0 \Lambda$$

$\left(J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \right)$

Entonces Λ' es Lagrangiano:

$u, v \in \Lambda$:

$$\omega_0(J_0 u, J_0 v) = \omega_0(u, v) = 0$$

Además:

$$\Lambda \cap \Lambda' = \Lambda \cap J_0 \Lambda = 0$$

Para verlo, sean $u, v \in \Lambda$:

$$(J_0 u) \cdot v = \omega_0(u, v) = 0$$

Por tanto:

$$\Lambda^{\perp} = J_0 \Lambda = \Lambda'.$$

Corolario: Si $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ es Lagrangiano, entonces $J_0 \Lambda$ es Lagrangiano y además:

$$\Lambda^{\perp} = J_0 \Lambda$$

$$\mathbb{R}^{2n} = \Lambda \oplus J_0 \Lambda$$

Recordamos que:

$$\varphi : (\mathbb{R}^{2n}, J_0) \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x, y) \longmapsto x + iy$$

es isomorfismo de espacios vectoriales complejos pues:

$$\varphi(J_0(x,y)) = i\varphi(x,y).$$

Por tanto, la igualdad:

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$$

se compara con la igualdad:

$$\mathbb{R}^{2n} = \Lambda \oplus J_0 \Lambda$$

cuando Λ es Lagrangiano.

Otro ejemplo en $\mathbb{C}^2$:

$$V = \{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

entonces $V \subseteq \mathbb{C}^2$ es subespacio real y:

$$\mathbb{C}^2 = V \oplus iV$$

Definición: Si W es espacio vectorial complejo, entonces $V \subseteq W$ se dice forma real si V es subespacio real y

$$W = V \oplus iV$$

También se dice que V es totalmente real. V define la conjugación:

$$\sigma : W \longrightarrow W$$
$$u+iv \longmapsto u-iv$$

donde $u, v \in V$.

Otros ejemplos de formas reales:

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus i\,\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$$
$$= \mathfrak{su}(n) \oplus i\,\mathfrak{su}(n)$$

*) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ Lagrangiano. Entonces $J_0\Lambda$ se identifica con Λ^*. Para verlo:

$$\mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^{2n})^*$$
$$v \longmapsto \omega_0(v, \ )$$

que es un isomorfismo y tomamos:

restricción

$$\Theta : J_0\Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^{2n})^* \longrightarrow \Lambda^*$$
$$J_0 v \longmapsto J_0 v \qquad\qquad f \longmapsto f|_\Lambda$$

que resulta ser isomorfismo.

Como $\dim \Lambda^* = \dim \Lambda = \dim J_0\Lambda$, basta ver injectividad.

Sea $v \in \Lambda$ tal que $\Theta(J_0 v) = 0$, entonces:

$$0 = \Theta(J_0 v)(v) = \omega_0(J_0 v, v) = (J_0 J_0 v)\cdot v$$
$$= -v \cdot v \quad \therefore \quad v = 0$$

Sea $u_1, \dots, u_n \in \Lambda$ una base y sea $f_1, \dots, f_n \in \Lambda^*$ la base dual:

$$f_j(u_k) = \delta_{jk}$$

Sea $v_1, \dots, v_n$ la base de $J_0\Lambda$ tal que:

$$\Theta(v_j) = f_j$$

Luego tenemos:

$$\delta_{jk} = f_j(u_k) = \Theta(v_j)(u_k)$$
$$= \omega_0(v_j, u_k)$$

y ya sabemos:

$$\omega_0(u_r, u_s) = 0 = \omega_0(v_r, v_s) \quad \forall r, s$$

Por tanto:

$$v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$$

es base simpléctica de $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposición: Sea (V, ω) espacio simpléctico. Entonces:

*) Todo subespacio isotrópico W está contenido en un subespacio Lagrangiano.

*) Toda base de un subespacio Lagrangiano se extiende a una base simpléctica.

$\longrightarrow$) Reducción simpléctica lineal.

Lema: Sea (V, ω) espacio vectorial simpléctico y $W \subseteq V$ sobespacio coisotrópico $(W^\omega \subseteq W)$. Entonces:

(1) El cociente $\overline{W} = W/W^\omega$ tiene la forma simpléctica dada por:

$$\bar{\omega}(w_1 + W^\omega, w_2 + W^\omega) = \omega(w_1, w_2).$$

En particular:

$$\omega|_{W \times W} = \pi^*(\bar{\omega})$$

donde $\pi : W \longrightarrow W/W^\omega = \overline{W}$.

(2) Si $\Lambda \subseteq V$ es Lagrangiano, entonces:

$$\bar{\Lambda} = ((\Lambda \cap W) + W^\omega)/W^\omega$$

es Lagrangiano en $\overline{W}$.

Propiedades de $Sp(n, \mathbb{R})$.
($Sp(2n)$ en el libro)

$\mathbb{R}^{2n}$ tiene las estructuras:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$ estructura compleja. $(J_0^2 = -id)$

- ó $\langle (x,y),(x',y')\rangle = \sum_{j=1}^{n} (x_j x_j' + y_j y_j')$ producto interno

$$\omega_0(\ , \ ) = \langle J_0(\ ), (\ )\rangle$$

En particular:

$$\omega_0(\ , J_0(\ )) = \langle J_0(\ ), J_0(\ )\rangle$$
$$= \langle \ , \ \rangle$$

pues $J_0^T = -J_0 = J_0^{-1}$ $\therefore$ J_0 ortogonal.

Por tanto, dos de ellas determina a la tercera.

Sea $A: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ lineal invertible. Entonces:
$(GL(n,\mathbb{C}) \subseteq GL(2n,\mathbb{R}))$

$$A \in GL(n,\mathbb{C}) \iff AJ_0 = J_0 A$$

$$A \in Sp(n,\mathbb{R}) \iff A^T J_0 A = J_0$$

$$A \in O(2n) \iff A^T A = I_{2n}$$

Corolario:
$$GL(n,\mathbb{C}) \cap Sp(n,\mathbb{R}) =$$
$$= GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n)$$

$= Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n) = U(n)$

Observación:

De hecho $U(n) \leq Sp(n, \mathbb{R})$ es subgrupo maximal compacto. Además:

$$Sp(n, \mathbb{R}) / U(n)$$

es espacio Riemanniano simé_trico Hermitiano.

$$U(n) \xhookrightarrow{i} Sp(n, \mathbb{R})$$

es una equivalencia de homo_topía.

$\therefore \exists$ $f : Sp(n, \mathbb{R}) \longrightarrow U(n)$ continuo tal que:

$$f \circ i \sim id_{U(n)}$$
$$i \circ f \sim id_{Sp(n, \mathbb{R})}$$ homotopicamen_te equiv.

De hecho (Helgason) $\exists$ $k \geq 1$ tal que:

$$Sp(n, \mathbb{R}) \cong U(n) \times \mathbb{R}^k$$

homeomorfismo.

(Capítulo sobre Espacios simé_tricos de tipo nocompacto)

Algunas propiedades:

$$J_0^T J_0 J_0 = (-J_0)(-I_{2n}) = J_0$$

$\therefore \quad J_0 \in Sp(n, \mathbb{R})$

$A \in Sp(n, \mathbb{R})$:

$$A^T J_0 A = J_0$$

$$\Rightarrow A^T = J_0 A^{-1} J_0^{-1} \in Sp(n, \mathbb{R}).$$

De aquí se obtiene:

$A \in Sp(n, \mathbb{R})$:

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A)$$

Ver Lema 2.2.2.