$X_{f+g} = X_f + X_g$:

$$\omega(X_f + X_g, \cdot) = \omega(X_f, \cdot) + \omega(X_g, \cdot)$$
$$= df(\ ) + dg(\ )$$
$$= d(f+g)(\ )$$
$$= \omega(X_{f+g}, \cdot).$$

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave

$df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \ (= T_{f(p)}\mathbb{R})$

se define: $df_p(v) = v(f)$

Comparar con el caso $M = \mathbb{R}^n$:

$$e_j \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$df_p(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$$

Berezin probó que en todo dominio acotado:

f, g símbolos $\ni$

$$[T_f^\lambda, T_g^\lambda] = 0 \qquad \lambda \text{ peso}$$

$$\Longrightarrow \quad \{f, g\} = 0 \qquad \text{(Berezin)}$$

$$\overset{\text{curso}}{\Longrightarrow} \quad [X_f, X_g] = 0$$

$\Longleftrightarrow$ hay un álgebra Lie Abeliana

$\Longleftrightarrow$ hay un grupo de Lie Abeliano.

Recordamos:

$$\{f, g\} = X_g(f)$$

$\therefore \{f, g\} = 0 \Longleftrightarrow f$ es invariante bajo el flujo de X_g.

Sea G grupo actuando sobre conjuntos X, Y:

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$G \times Y \longrightarrow Y$$

Un mapeo $F : X \longrightarrow Y$ se dice G-equivariante si:

$$F(gx) = gF(x) \quad \forall x \in X, g \in G.$$

En nuestro caso:

$X = C^{\infty}(M)$, $Y = \mathfrak{X}(M, \omega)$, $G = Symp(M, \omega)$

$$F : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M, \omega)$$
$$F(f) = X_f$$

y tenemos:

$$F(\varphi \cdot f) = F(f \circ \varphi^{-1})$$
$$= X_{f \circ \varphi^{-1}} \underset{\text{Tma}}{=} d\varphi(X_f) = \varphi \cdot F(f)$$

es decir, hay $Symp(M, \omega)$-equivarianza.