Tensores:

$X \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriales

$\omega \in \Omega^1(M)$ 1-formas

$\alpha \in \Omega^k(M)$ k-formas

$R_p : T_pM^3 \longrightarrow T_pM$ curvatura

En general:

T asignación (r, s fijos

$p \longmapsto T_p : T_pM^r \longrightarrow T_pM^s$ lineal

Convención: $T_pM^0 = \mathbb{R}$.

Campos corresponden a:

$$T_pM^0 = \mathbb{R} \longrightarrow T_pM$$
$$1 \longmapsto X_p$$
$$t \longmapsto tX_p$$

La asignación T debe ser suave. El tensor T se dice r-covariante s-contravariante.

Nos restringiremos al caso $s = 0, 1$.

Ejemplos:

1) $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ es 0-covariante
0-contravariante

2) $X \in \mathfrak{X}(M)$ es 0-covariante
1-contravariante

$p \longmapsto X_p$

$p \longmapsto [t \longmapsto t X_p]$
$\mathbb{R} \longrightarrow T_pM$

3) $\omega \in \Omega^2(M)$, e.g. 2-forma asociada.

$p \longmapsto [\omega_p : T_pM^2 \longrightarrow \mathbb{R}]$ bilineal antisimétrica

es 2-covariante, 0-contravariante

4) J estructura compleja

$p \longmapsto [J_p : T_pM \longrightarrow T_pM]$

$(\ni J_p^2 = -id)$

es 1-covariante, 1-contravariante.

5) La curvatura R es 3-covariante, 1-contravariante.

Sea

$$T : p \longmapsto [T_p : T_pM^r \longrightarrow T_pM^s]$$

$\underline{s = 0, 1}$

un tensor.

$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ su derivada co_
variante:

$$(\nabla_X T)(X_1, \dots, X_r) =$$

$$= \nabla_X (T(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{j=1}^{r} T(X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_r)$$

Ejemplos:

1) $\alpha \in \Omega^h(M)$:

$$(\nabla_X \alpha)(X_1, \dots, X_h) =$$

$$= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) - \sum_{j=1}^{h} \alpha(X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_h)$$

2) h métrica Riemanniana

$$(\nabla_X h)(Y, Z) =$$

$$= X(h(Y,Z)) - h(\bar{\nabla}_X Y, Z) - h(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

Por tanto:

$\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de h

$$\Longleftrightarrow \quad \bar{\nabla}_X h = 0 \quad (+\ \bar{\nabla} \text{ sin torsión}) \quad \forall X$$

3) J estructura compleja

$$(\bar{\nabla}_X J)(Y) = \bar{\nabla}_X (JY) - J\bar{\nabla}_X Y$$

$$\therefore \ \bar{\nabla}_X J = 0 \Longleftrightarrow \bar{\nabla}_X J = J\bar{\nabla}_X$$

4) ω 2-forma:

$$(\bar{\nabla}_X \omega)(Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) - \omega(\bar{\nabla}_X Y, Z) - \omega(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$