Mapeos de Momento.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica.

Recordamos el mapeo:

$$C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M, \omega)$$
$$f \longmapsto X_f$$

dado por $df = \omega(X_f, \cdot)$.

Denotaremos:

$$\mathfrak{X}_h(M, \omega) = \{X_f \mid f \in C^{\infty}(M)\}$$

(campos Hamiltonianos) el cual es un álgebra de Lie.

Recordamos que:

$$X \in \mathfrak{X}(M, \omega) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} L_X \omega = 0$$
$$\Longleftrightarrow \omega(X, \cdot) \text{ cerrada.}$$

Además, el mapeo:

$$C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_h(M, \omega) \subseteq \mathfrak{X}(M, \omega)$$
$$f \longmapsto X_f$$

es anti-homomorfismo de álgebras de Lie.

Sea H un grupo de Lie que actúa sobre (M, ω) por simplectomorfismos:

$$\omega(dh(\cdot), dh(\cdot)) = \omega(\cdot, \cdot)$$

$\forall h \in H$.

Ahora definimos un mapeo:

$$\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$X \longmapsto X^{\#}$$

donde:

$$X^{\#}_z = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sX) \cdot z \quad \forall z \in M$$

Es decir, $X^{\#}$ es el campo vectorial en M cuyo flujo global es dado por el subgrupo uniparamétrico:

$$s \longmapsto \exp(sX) \quad s \in \mathbb{R}$$

actuando en M.

Como $\exp(sX) \in H$ actúa preservando ω, concluimos que:

$$X^{\#} \in \mathfrak{X}(M, \omega)$$

$\forall X \in \mathfrak{h}$.

Obtenemos un mapeo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M,\omega) \\ X &\longmapsto X^{\#} \end{aligned}$$

Es fácil ver que este mapeo es un anti-homomorfismo de álgebras de Lie. Es decir, es $\mathbb{R}$-lineal y:

$$[X,Y]^{\#} = -[X^{\#},Y^{\#}]$$

$\forall X,Y \in \mathfrak{h}$. Ver Teorema 3.4 en la página 122 del libro de Helgason (Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces).

Consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & C^\infty(M) \arrow[d] & f \arrow[d, mapsto] \\ \mathfrak{h} \arrow[ur, dashed, "\mu"] \arrow[r] & \mathfrak{X}(M,\omega) & X_f \\ X \arrow[r, mapsto] & X^{\#} & \end{tikzcd}$$

Problema: Levantar el mapeo $X \longmapsto X^{\#}$ a un homomorfismo de álgebras de Lie μ.

Solución: Solamente es posible bajo ciertas condiciones.

Cuando μ existe decimos que la H-acción es Hamiltoniana.

Problema 1: Determinar condiciones bajo las cuales μ existe.

Problema 2: Para ciertos casos en que μ existe, calcular μ.

Nos interesa el Problema 2 y sus aplicaciones al estudio de operadores de Toeplitz.

Formas alternativas de considerar μ.

Originalmente hemos planteado:

$$\mu : h \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

pero esto es equivalente a:

$$\mu_1 : M \times h \longrightarrow \mathbb{R}$$

si tomamos:

$$\mu_1(z, X) = \mu(X)(z).$$

Debemos pedir:

*) μ_1 suave.

*) $\forall z \in M$: $X \longmapsto \mu_1(z, X)$ $\mathbb{R}$-lineal.

Como segunda alternativa consideramos:

$$\mu_2 : M \longrightarrow \mathfrak{h}^*$$

donde $\mathfrak{h}^*$ es el espacio dual de $\mathfrak{h}$, y la relación es ahora:

$$\mu_2(z)(X) = \mu(X)(z).$$

De nuevo pedimos que μ_2 sea suave.

Esta última opción es la más usada y útil para nosotros.

Definición:
Sea (M, ω) una variedad simpléctica y H un grupo de Lie. Supongamos que H actúa suavemente sobre M preservando ω. Un mapeo de momento

(moment map) para la H-acción es un mapeo suave:

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{h}^*$$

que satisface

1) $\forall X \in \mathfrak{h}$ definimos

$$\mu_X : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu_X(z) = \langle \mu(z), X \rangle$$

Entonces, $X^\#$ es el campo Hamiltoniano de μ_X.

2) μ is H-equivariante, es decir:

$$\mu(hz) = Ad^*(h)(\mu(z))$$

$\forall z \in M$, $h \in H$.

Recordamos que:

$$Ad : H \longrightarrow GL(\mathfrak{h})$$

es la representación adjunta dada por:

$$Ad(h)(X) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} h\exp(sX)h^{-1}$$

Además, Ad^* es la represen_

tación dual de Ad:

$$Ad^*: H \longrightarrow GL(\mathfrak{h}^*)$$

$$Ad^*(h)(\lambda) = \lambda \circ Ad(h^{-1}).$$

Si H es Abeliano, entonces:

$$Ad(h) = I_{\mathfrak{h}} \quad \forall h \in H.$$

y la condición 2) se reduce a:

$$\mu(hz) = \mu(z) \quad \forall z \in M, h \in H.$$

Para calcular el mapeo de momento, cuando existe, se debe resolver μ_X en las ecuaciones:

$$d\mu_X = \omega(X^\#, \cdot)$$

linealmente en $X \in \mathfrak{h}$.

Si $X_1, \dots, X_k$ es base de $\mathfrak{h}$, entonces hay que resolver:

$$d\mu_j = \omega(X_j^\#, \cdot)$$

$\forall j = 1, \dots, k.$

Alternativamente, hay que hallar funciones $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tales que:

$$X_{\mu_j} = X_j^{\#} \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Necesitamos una forma eficiente de calcular X_f y $X^{\#}$.

Sea (M, g) una variedad de Kähler con métrica Hermitiana y forma de Kähler en coordenadas locales dadas por:

$$h = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k$$

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

Supongamos que $M \subseteq \mathbb{C}^n$ es un subconjunto abierto y que $(z_1, \ldots, z_n)$ son las coordenadas de $\mathbb{C}^n$.

Sea H un grupo de Lie que actúa sobre M preservando ω. Si $X \in \mathfrak{h}$, entonces:

$$X^{\#}_z = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(sX) z \in \mathbb{C}^n$$

es decir:

$$X^{\#} : M \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

Supongamos que:

$$X^{\#} = (f_1, \dots, f_n) = (u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n)$$

Entonces:

$$X^{\#} = \sum_{j=1}^{n} \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

como campo vectorial sección de TM. Pero $TM \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ y usando las definiciones es fácil ver que:

$$X^{\#} = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{f}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)$$

como campo vectorial complejo.

Ejemplo:

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$t \cdot z = (t_1 z_1, \ldots, t_n z_n)$$

Entonces:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Lie}(\mathbb{T}^n)$$
$$\exp : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$$
$$s = (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto (e^{is_1}, \ldots, e^{is_n})$$

Sea $X \in \mathbb{R}^n$, por tanto:

$$X = (s_1, \ldots, s_n)$$
$$\exp(sX)z =$$
$$= (e^{iss_1}, \ldots, e^{iss_n})z$$
$$= (e^{iss_1} z_1, \ldots, e^{iss_n} z_n)$$

Luego:

$$X^\#_z = (is_1 z_1, \ldots, is_n z_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + \overline{f_j(z)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right)$$

donde $f_j(z) = i s_j z_j$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(i s_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - i s_j \overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right)$$

Dada $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$, queremos hallar X_f tal que:

$$df = \omega(X_f, \cdot)$$

En primer lugar:

$$X_f = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)$$

con a_j, b_j por determinar.

Por otro lado, si $f = u + iv$, entonces:

$$\begin{aligned} df &= du + i\,dv \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u}{\partial y_j} dy_j \right) \\ &\quad + i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial v}{\partial y_j} dy_j \right) \end{aligned}$$

Observamos el siguiente cálculo:

$$2\left(\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(u+iv)(dx_j + i\,dy_j)$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(u+iv)(dx_j - i\,dy_j)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j + i\frac{\partial v}{\partial x_j}dx_j - i\cancel{\frac{\partial u}{\partial y_j}}dx_j + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y_j}}dx_j$$

$$+ i\cancel{\frac{\partial u}{\partial x_j}}dy_j - \cancel{\frac{\partial v}{\partial x_j}}dy_j + \frac{\partial u}{\partial y_j}dy_j + i\frac{\partial v}{\partial y_j}dy_j$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j + i\frac{\partial v}{\partial x_j}dx_j + i\cancel{\frac{\partial u}{\partial y_j}}dx_j - \cancel{\frac{\partial v}{\partial y_j}}dx_j$$

$$- i\cancel{\frac{\partial u}{\partial x_j}}dy_j + \cancel{\frac{\partial v}{\partial x_j}}dy_j + \frac{\partial u}{\partial y_j}dy_j + i\frac{\partial v}{\partial y_j}dy_j$$

$$= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial u}{\partial y_j}dy_j\right) + 2i\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial v}{\partial y_j}dy_j\right)$$

We conclude that:

$$df = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j\right).$$

De los cálculos anteriores, para resolver X_f en:

$$df = \omega(X_f, \cdot)$$

expresamos:

$$X_f = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)$$

y resolvemos para a_j, b_j donde

$$\omega = i \sum_{j=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \wedge d\bar{z}_h .$$

La solución es:

$$X_f = i \sum_{j,h=1}^{n} g^{jh} \left(\frac{\partial f}{\partial z_h} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_h} \right)$$

donde $(g^{jh})_{j,h}$ es la inversa de $(g_{jh})_{jh}$:

$$\sum_{h=1}^{n} g_{jh} g^{hl} = \sum_{h=1}^{n} g^{jh} g_{hl} = \delta_{jl} \quad \forall j, l.$$

Para checar esta afirmación evaluamos:

$$\omega(X_f,\cdot) =$$

$$= i\sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j\wedge d\bar z_h\left(i\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\left(\frac{\partial f}{\partial z_s}\frac{\partial}{\partial \bar z_r}-\frac{\partial f}{\partial \bar z_r}\frac{\partial}{\partial z_s}\right),\cdot\right)$$

$$= -\sum_{j,h,r,s=1}^{n} g_{jh}g^{rs}\left(dz_j\wedge d\bar z_h\left(\frac{\partial f}{\partial z_s}\frac{\partial}{\partial \bar z_r},\cdot\right)\right.$$

$$\left.- dz_j\wedge d\bar z_h\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z_r}\frac{\partial}{\partial z_s},\cdot\right)\right)$$

$$= -\sum_{j,h,r,s=1}^{n} g_{jh}g^{rs}\left(-\frac{\partial f}{\partial z_s}\delta_{hr}\, dz_j - \frac{\partial f}{\partial \bar z_r}\delta_{js}\, d\bar z_h\right)$$

$$= \sum_{j,h,r,s=1}^{n} g_{jh}g^{rs}\delta_{hr}\frac{\partial f}{\partial z_s}\, dz_j$$

$$+ \sum_{j,h,r,s=1}^{n} g_{jh}g^{rs}\delta_{js}\frac{\partial f}{\partial \bar z_r}\, d\bar z_h$$

$$= \sum_{j,s=1}^{n}\delta_{js}\frac{\partial f}{\partial z_s}\, dz_j + \sum_{h,r=1}^{n}\delta_{hr}\frac{\partial f}{\partial \bar z_r}\, d\bar z_h$$

$$= df.$$

Usamos que:

$$dz_j\wedge d\bar z_h = dz_j\otimes d\bar z_h - d\bar z_h\otimes dz_j.$$