Variedades de Kähler.

En lo sucesivo trabajaremos sobre (M, g) variedad Hermitiana.
Es decir, tenemos:

*) M es variedad compleja:
los cambios de coordenadas son holomorfos y así hay cartas holomorfas $(U, \varphi = (z_1, \dots, z_n))$.
Además tenemos:

$$J : TM \longrightarrow TM$$

$$J_x(T_xM) \subseteq T_xM \quad y \quad J_x^2 = -id_{T_xM}.$$

*) g es métrica Riemanniana tal que:

$$g_x(J_x u, J_x v) = g_x(u, v)$$

$\forall u, v \in T_xM, x \in M.$

Se procede a complexificar todos los objetos.

$$(U, \varphi = (z_1, \dots, z_n) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n))$$

$$T^{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes TM$$

con base sobre $\mathbb{C}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

y también es base sobre $\mathbb{C}$:

$j=1,\dots,n$: $$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Hay una conjugación:

$$T^{\mathbb{C}}M \longrightarrow T^{\mathbb{C}}M$$

$$w = u+iv \longmapsto \bar{w} = u - iv$$

$\forall u, v \in T_xM$, $x \in M$.

Complexificamos g, J y consideramos:

$$T_x^{1,0}M = \{w \in T_x^{\mathbb{C}}M \mid Jw = iw\}$$

$$= \{u - iJu \mid u \in T_xM\}$$

$$T_x^{0,1}M = \{w \in T_x^{\mathbb{C}}M \mid Jw = -iw\}$$

$$= \{u + iJu \mid u \in T_xM\}$$

Tenemos isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} & T_x^{1,0}M \arrow[d, "3"] \\ T_xM \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "2"'] & T_x^{0,1}M \end{tikzcd}$$

$$u \mapsto \frac{1}{2}(u - iJu), \qquad u \mapsto \frac{1}{2}(u + iJu), \qquad w \mapsto \overline{w}$$

1 es $\mathbb{C}$-lineal y 2, 3 son $\mathbb{C}$-anti-lineales.

Tenemos bases sobre $\mathbb{C}$

$$T_x^{1,0}M \qquad \frac{\partial}{\partial z_j}, \; j = 1, \dots, n$$

$$T_x^{0,1}M \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}, \; j = 1, \dots, n.$$

Además se cumple:

$$g(T_x^{1,0}M, T_x^{1,0}M) = 0 = g(T_x^{0,1}M, T_x^{0,1}M)$$

Por ello consideramos el producto Hermitiano:

$$T_x^{1,0}M \times T_x^{1,0}M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(w_1, w_2) \longmapsto g(w_1, \overline{w_2})$$

En coordenadas tenemos:

$$g = \sum_{j,k=1}^{n} g_{j\bar{k}}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k \qquad (*)$$

donde $g_{j\bar{k}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)$.

Notar que usamos el mismo símbolo g.

Recíprocamente, todo tensor g como en $(*)$ define una métrica Hermitiana para M compleja.

Además tenemos una 2-forma:

$$\omega = g(J(\ ),\ )$$

ó

$$\omega = -2\,\mathrm{Im}(g)$$

ó

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} g_{j\bar{k}}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

ω es llamada la 2-forma asociada, que es nodegenerada porque $(g_{j\bar{k}})_{jk}$ lo es.

Definición: Una variedad Hermitiana (M, g) es llamada variedad de Kähler ó variedad Kähleriana si ω es cerrada:

$$d\omega = 0.$$

y en este caso ω es llamada la forma de Kähler ó Kähleriana de M.

Para la métrica Riemannian g de M, denotaremos por $\tilde{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita.

En lo sucesivo g denota la métrica Riemanniana y la métrica:

$$\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \, dz_j \otimes d\bar{z}_k.$$

Para distinguir una de la otra indicamos cual se encuentra en uso.

Teorema (Mok, página 18)
Sea (M, g) una variedad Hermitiana. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

(1) el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$:

$$\tau = \tau_0^1(\gamma) : T^{\mathbb{C}}_{\gamma(0)} M \longrightarrow T^{\mathbb{C}}_{\gamma(1)} M$$

preserva tipos:

$$\tau(T^{1,0}_{\gamma(0)} M) = T^{1,0}_{\gamma(1)} M, \quad \tau(T^{0,1}_{\gamma(0)} M) = T^{0,1}_{\gamma(1)} M.$$

(2) si X es un campo vectorial real paralelo a largo de $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, entonces JX también es paralelo.

(3) $\nabla J \equiv 0$

(4) $\nabla \omega \equiv 0$

(5) $d\omega \equiv 0$

(6) alrededor de todo punto de M existen coordenadas $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ holomorfas

y F suave real tal que:

$$g_{jh} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \bar{z}_h}$$

F es llamada función potencial.

(7) $\forall x_0 \in M \ \exists \ \varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ coordenadas holomorfas tales que g en estas coordenadas satisface:

$$g_{jh}(x_0) = \delta_{jh} \ , \ d g_{jh}(x_0) = 0$$

$\forall j, h = 1, \ldots, n.$

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2).

Sea X campo vectorial real a lo largo de $r : [0,1] \longrightarrow M$.

$\therefore \ \forall t \in [0,1]: \ X_t \in T_{r(t)} M.$

r define una derivada covariante:

$$\frac{\nabla}{dt} : \left\{ \begin{matrix} \text{campos a} \\ \text{lo largo de } r \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{campos a} \\ \text{lo largo de } r \end{matrix} \right\}$$

En este caso:

$$\frac{\nabla}{dt} X = 0$$

Descomponemos:

$$X_0 = X_0' + X_0''$$

con $X_0' \in T^{1,0}_{r(0)} M$, $X_0'' \in T^{0,1}_{r(0)} M$.

Sean X', X'' de tipo $(1,0)$, $(0,1)$, respectivamente, los transportes paralelos de X_0', X_0''.

$\therefore$ $X' + X''$ es paralelo con valor inicial $X_0' + X_0'' = X_0$, y por unicidad del transporte paralelo:

$$X = X' + X''$$

Además, por la hipótesis (1)

$$X_t' \in T^{1,0}_{r(t)} M \qquad \forall t \in [0,1].$$
$$X_t'' \in T^{0,1}_{r(t)} M$$

Por tanto:

$$J X = J X' + J X''$$
$$= i X' - i X''$$

que es paralelo.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $\gamma:[0,1] \longrightarrow M$ suave y sea $v \in T^{1,0}_{\gamma(0)}M$. Denotemos por X el transporte paralelo de v a lo largo de γ.

$\therefore \; X_0 = v.$

Descomponemos:

$$X = X' + X''$$

con X', X'' de tipo $(1,0)$, $(0,1)$, respectivamente.

Por la hipótesis (2), JX es paralelo y como:

$$JX = iX' - iX''$$

entonces

$$X', X'' \text{ son paralelos.}$$

Como $X''_0 = 0$, se concluye que:

$$X'' = 0$$

Por tanto, $X = X'$ y el transporte paralelo preserva tipos.

(2) $\Rightarrow$ (3):

Usamos la fórmula:

$$(\nabla_X J)(Y) = \bar{\nabla}_X(JY) - J(\bar{\nabla}_X Y)$$

que es válida en general y para cualesquiera campos X, Y.

Sean $u, v \in T_x M$, $x \in M$.
Sea $\gamma: [0, L] \longrightarrow M$ cualquier curva con $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = u$.
Sea Y el transporte paralelo de v a lo largo de γ.

Entonces, (2) implica que JY es paralelo a lo largo de γ.

Extendemos Y a un campo en M desde una vecindad de x. Luego tenemos:

$$\nabla_u Y = \frac{\nabla}{dt} Y \Big|_x = 0$$

$$\nabla_u (JY) = \frac{\nabla}{dt} JY \Big|_x = 0$$

La fórmula de arriba nos

implica que:

$$(\nabla_u J)(v) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla J \equiv 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

Usaremos la misma fórmula.

Sea Y paralelo a lo largo de $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$. Sea $t \in [0,1]$, $u = \gamma'(t)$ y en una vecindad de $\gamma(t)$ extendemos el campo Y y el vector u a campos locales Y, X, respectivamente.

Usando la fórmula de arriba:

$$0 = (\nabla_u J)(Y_t) = \nabla_u (JY) - J\nabla_u Y$$

$$= \frac{\nabla}{dt} JY \Big|_t - J0$$

$\therefore \ \frac{\nabla}{dt} JY \equiv 0 \quad \therefore$ JY es paralelo.

(3) $\Longleftrightarrow$ (4).

Como ∇ es la conexión de Levi-Civita:

$$\nabla g = 0$$

Por otro lado:

$$\omega = g(J(\ ),(\ ))$$

Por tanto:

$$(\nabla_X \omega)(Y,Z) =$$

$$= X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z)$$

$$= X(g(JY,Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)$$

$$= (\nabla_X g)(JY,Z) + g(\nabla_X(JY),Z) + g(JY,\nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY,\nabla_X Z)$$

$$= g(\nabla_X(JY) - J\nabla_X Y, Z)$$

Pero sabemos que:

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X (JY) - J\nabla_X Y$$

Por tanto:

$$(\nabla_X \omega)(Y, Z) = g((\nabla_X J)(Y), Z)$$

$$\therefore \nabla \omega = 0 \iff \nabla J = 0.$$

(4) $\Longrightarrow$ (5)

Sea B un tensor bilineal:

$$B_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall x \in M$.

Entonces, como antes:

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = X(B(Y, Z))$$
$$- B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

Respecto de coordenadas $(u_1, \dots, u_m)$ tenemos:

$$(\nabla_{\partial u_j} B)(\partial u_k, \partial u_\ell) =$$
$$= \frac{\partial B_{k\ell}}{\partial u_j} - B(\nabla_{\partial u_j} \partial u_k, \partial u_\ell)$$

$$- B(\partial_{x_h}, \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_l})$$

$$= \frac{\partial B_{hl}}{\partial u_j} - \sum_{r=1}^{m} \Gamma_{jh}^{r} B_{rl} - \sum_{r=1}^{m} \Gamma_{jl}^{r} B_{hr}$$

Se conoce el siguiente resultado:

Proposición: (N, g) variedad Riemanniana. Entonces $\forall\, x_0 \in N$ $\exists$ coordenadas $(u_1, \dots, u_m)$ alrededor de x_0 tal que:

$$g_{jh}(x_0) = \delta_{jh}, \quad \Gamma_{jh}^{r}(x_0) = 0.$$
$$d g_{jh}(x_0) = 0$$

$$\forall j, h, r.$$

Dem: Se pueden usar las llamadas coordenadas normales. //

Por tanto, en coordenadas normales:

$$(\nabla_{\partial_{x_j}} B)(\partial_{x_h}, \partial_{x_l})(x_0) = \frac{\partial B_{hl}}{\partial u_j}(x_0)$$

Por hipótesis (4)

$$\nabla\omega = 0$$

y en coordenadas normales $(u_1, \dots, u_{2n})$ esto implica:

$$\frac{\partial \omega_{jh}}{\partial u_\ell}(x_0) = 0$$

Pero si escribimos:

$$\omega = \sum_{1\leq j<h\leq 2n} \omega_{jh}\, du_j \wedge du_h$$

entonces $d\omega = 0$.

5) $\Rightarrow$ 6)

Por hipótesis $d\omega = 0$.
En coordenadas locales:

$$\omega = i\sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \wedge d\bar{z}_h$$

y queremos hallar una función F (también local) tal que:

$$g_{jh} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \bar{z}_h}.$$

Supongamos que las coordenadas son:

$$\varphi = (z_1, \dots, z_n) \quad \text{en } U \subseteq M.$$

Entonces tenemos operadores:

$$\partial, \bar{\partial} : C^\infty(U) \longrightarrow \Omega^1(U)$$

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

Entonces se puede verificar que:

$$df = \partial f + \bar{\partial} f$$

$$\partial f\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial z_j}, \quad \bar{\partial} f\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$$

Más aún, se puede checar que $\partial, \bar{\partial}$ no dependen de las coordenadas y por tanto definen operadores:

$$\partial, \bar{\partial} : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^1(M).$$

Recordamos que: (formas en z)

$T_z^{\mathbb{C}*}M$ tiene base
$dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$

$T_z^{1,0*}M$ tiene base
$dz_1, \dots, dz_n$

$T_z^{0,1*}M$ tiene base
$d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$

Por tanto, localmente tenemos las siguientes bases sobre $C^\infty(U)$:

$\Omega^1(U)$: $dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dz_j + \sum_{j=1}^{n} f_{\bar{j}} \, d\bar{z}_j$$

$\Omega^2(U)$: $dz_j \wedge dz_h$, $d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_h$
$1 \leq j < h \leq n$

$dz_j \wedge d\bar{z}_h \quad j, h = 1, \dots, n$

$$\alpha = \sum_{j<h} f_{(j,h),0} \, dz_j \wedge dz_h + \sum_{j<h} f_{0,(j,h)} \, d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_h + \sum_{j,h=1}^{n} f_{j,h} \, dz_j \wedge d\bar{z}_h .$$

Más generalmente:

$\Omega^k(M)$ tiene una base sobre $C^\infty(U)$ descrita como sigue.

Sean $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ tales que:

$$|I| + |J| = h$$

Denotamos:

$$dz_{I,J} = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{|I|}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{|J|}}$$

donde $I = \{i_1 < \dots < i_{|I|}\}$

$J = \{j_1 < \dots < j_{|J|}\}$

Entonces la base es:

$$\left\{ dz_{I,J} \;\middle|\; \begin{array}{l} I, J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| + |J| = h \end{array} \right\}$$

es decir $\forall\, \alpha \in \Omega^h(U)$:

$$\alpha = \sum_{|I|+|J|=h} f_{I,J}\, dz_{I,J}.$$

Podemos separar las h-formas por el número de variables

z_j ó $\overline{z}_j$:

$$\alpha = \sum_{\substack{0 \leq p,q \leq k \\ p+q=k}} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{I,J}\, dz_{I,J}$$

Se puede probar que la descomposición no depende de las coordenadas. Definimos:

$\forall\ p,q \geq 0$ enteros:

$\Omega^{p,q}(M)$ aquellas $(p+q)$-formas que localmente se escriben:

$$\sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{I,J}\, dz_{I,J}.$$

Los elementos de $\Omega^{p,q}(M)$ son llamados (p,q)-formas.

Ejemplo: Toda forma de Kähler se escribe localmente

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

Por tanto, ω es $(1,1)$-forma.

Localmente:

$$\alpha \in \Omega^{h}(M)$$

$$\alpha = \sum_{|I|+|J|=h} f_{I,J}\, dz_{I,J}$$

Por tanto:

$$d\alpha = \sum_{|I|+|J|=h} df_{I,J} \wedge dz_{I,J}$$

$$= \sum_{|I|+|J|=h} \partial f \wedge dz_{I,J} + \sum_{|I|+|J|=h} \bar{\partial} f \wedge dz_{I,J}$$

$$\underset{\text{(definición)}}{=} \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$$

Se puede ver que estas definiciones de $\partial\alpha$, $\bar{\partial}\alpha$ no dependen de las coordenadas

Vemos que:

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

y se puede probar que:

$$\partial^2 = 0, \ \bar{\partial}^2 = 0, \ \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

Además:

$\alpha \in \Omega^{p,q}(U)$:

$$\alpha = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{I,J}\, dz_{I,J}$$

$$\partial\alpha = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_j}\, dz_j \wedge dz_{I,J}$$

Pero:

$$dz_j \wedge dz_{I,J} = \begin{cases} 0, & j \in I \\ \pm dz_{I\cup\{j\},J}, & j \notin I \end{cases}$$

Por tanto:

$$\partial(\Omega^{p,q}(M)) \subseteq \Omega^{p+1,q}(M).$$

Similarmente:

$$\bar\partial(\Omega^{p,q}(M)) \subseteq \Omega^{p,q+1}(M).$$

Con lo anterior obtenemos el llamado complejo de Dolbeault:

$k=0 \qquad k=1 \qquad k=2$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{0,0} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar\partial"] & \Omega^{1,0} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Omega^{p,0} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{p+1,0} \arrow[r] & \cdots \\
\Omega^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial"] & \Omega^{1,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Omega^{p,1} \arrow[r] & \Omega^{p+1,1} \arrow[r] & \cdots \\
\vdots \arrow[d, "\bar\partial"] & & & & & \\
\Omega^{0,q} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{1,q} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Omega^{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{p+1,q} \arrow[r] & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \Omega^{p,q+1} \arrow[r] & \Omega^{p+1,q+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En particular:

$$\Omega^2 = \Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1} \oplus \Omega^{0,2}$$

y las 2-formas asociada de una variedad Hermitiana:

$$\omega \in \Omega^{1,1}(M)$$

En nuestro caso queremos:

$$(5) \Longrightarrow (6)$$

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \wedge d\bar z_k$$

$$d\omega = 0 \Longrightarrow$$

$$g_{jk} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \bar z_k}$$

Pero si $F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ es suave entonces:

$$\bar{\partial} F = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_h} d\bar{z}_h$$

$$\partial \bar{\partial} F = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \bar{z}_h} dz_j \wedge d\bar{z}_h$$

y por tanto queremos probar que $d\omega = 0$ implica que localmente:

$$\omega = i \, \partial \bar{\partial} F.$$

Esto es un problema de cohomología. Se resuelve como sigue:

Como $d\omega = 0$, el lema de Poincaré en cohomología nos dice que $\forall z_0 \in M$ $\exists U \subseteq M$ vecindad de z_0 y $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que:

$$\omega = d\alpha \quad \text{en } U.$$

Descomponemos:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \, , \; \alpha_1 \in \Omega^{1,0}(U), \alpha_2 \in \Omega^{0,1}(U)$$

Sabemos que:

$$\omega = \overline{\omega}$$

Luego:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2$$

pero $\alpha_1 \in \Omega^{1,0}(U) \implies \overline{\alpha}_1 \in \Omega^{0,1}(U)$

$\alpha_2 \in \Omega^{0,1}(U) \implies \overline{\alpha}_2 \in \Omega^{1,0}(U)$

$\therefore \quad \alpha_1 = \overline{\alpha}_2$

Con ello calculamos:

$$\underset{1,1}{\omega} = (\partial + \overline{\partial})(\underset{1,0}{\alpha_1} + \underset{0,1}{\alpha_2})$$

$$= \underset{2,0}{\partial \alpha_1} + \underbrace{\overline{\partial}\alpha_1 + \partial \alpha_2}_{1,1} + \underset{0,2}{\overline{\partial}\alpha_2}$$

$\therefore \quad \partial \alpha_1 = 0 = \overline{\partial}\alpha_2.$

$$\omega = \overline{\partial}\alpha_1 + \partial \alpha_2$$

Por el lema de Dolbeault en cohomología de Dolbeault (escogemos U contraible)

$$\overline{\partial}\alpha_2 = 0 \implies \exists\, f \in C^{\infty}(U) \ni$$

$$\overline{\partial} f = \alpha_2.$$

Por tanto:

$$\alpha_1 = \overline{\alpha}_2 = \overline{\overline{\partial} f} = \partial \overline{f}$$

Entonces:

$$\partial\overline{\partial}(f - \overline{f}) =$$
$$= \partial\overline{\partial} f - \partial\overline{\partial}\,\overline{f} = \partial\overline{\partial} f + \overline{\partial}\partial\overline{f}$$
$$= \partial\alpha_2 + \overline{\partial}\alpha_1 = \omega$$

Luego con $F = \frac{1}{i}(f - \overline{f})$:

$$i\partial\overline{\partial} F = \omega.$$

(6) $\Rightarrow$ (5):

Localmente:

$$\omega = i \sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \wedge d\overline{z}_h$$

$$g_{jh} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \overline{z}_h}$$

y con la notacion anterior esto es:

$$\omega = i\partial\overline{\partial} F$$

Luego:

$$d\omega = (\partial + \bar{\partial})\, i \partial \bar{\partial} F$$
$$= i(\partial^2 \bar{\partial} F - \partial \bar{\partial}^2 F) = 0.$$

$(5)+(6) \Rightarrow (7)$:

Se construyen las coordenadas deseadas como sigue.

Sean $\varphi = (w_1, \dots, w_n)$ coordenadas holomorfas alrededor de punto dado $z_0 \in M$.

$$\therefore \quad d\varphi_{z_0} : T_{z_0}M \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

y $(h_{jk}(z_0))_{j,k}$ es matriz Hermitiana definida positiva.

$$\therefore \quad (h_{jk}(z_0))_{j,k} \sim I_n$$

vía una transformación unitaria A. Por tanto, para las coordenadas $A \circ \varphi$ la matriz es I_n. Luego podemos suponer que para φ:

$$h_{jh}(z_0) = \delta_{jh}.$$

Además:

$$\omega = i \sum_{j,h=1}^{n} h_{jh}\, dw_j \wedge d\overline{w}_h$$

Sean $(z_1, \ldots, z_n)$ nuevas coordenadas dadas por:

$$w_j = z_j + \sum_{r,s=1}^{n} C^j_{r,s} z_r z_s$$

con $C^j_{r,s} = C^j_{s,r}$ por determinar.

En estas coordenadas:

$$\omega = i \sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \wedge d\overline{z}_h$$

$$g_{jh}(z_0) = \delta_{jh}$$

Además: $\left(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial z_h} \right)$

$$\partial_h g_{rs}(z_0) = \partial_h h_{rs}(z_0) + C^s_{hr} + C^s_{rh}$$

$$= \partial_h h_{rs}(z_0) + 2 C^s_{hr}$$

y basta escoger C's para que esto se anule.

Pero esto requiere:

$$\partial_h h_{rs}(z_0) = \partial_r h_{hs}(z_0)$$

Lo cual se deduce de $d\omega = 0$ como sigue:

$$0 = d\omega = \partial_{2,1}\omega + \bar{\partial}_{1,2}\omega$$

$$\therefore \partial\omega = 0$$

Pero:

$$0 = \partial\omega = i\,\partial \sum_{r,s=1}^{n} h_{rs}\, dz_r \wedge d\bar{z}_s$$

$$= i \sum_{h,r,s=1}^{n} \frac{\partial h_{rs}}{\partial z_h}\, dz_h \wedge dz_r \wedge d\bar{z}_s$$

$$= i \sum_{s=1}^{n} \sum_{h<r} \underbrace{\left(\frac{\partial h_{rs}}{\partial z_h} - \frac{\partial h_{hs}}{\partial z_r} \right)}_{\therefore = 0} dz_h \wedge dz_r \wedge d\bar{z}_s$$

(7) $\Rightarrow$ (4)

Debemos probar que $\nabla\omega = 0$.

En coordenadas locales debemos calcular:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \omega \quad , \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_h}} \omega$$

Para el primero: $r<s$

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_h}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right)\right)$$

$$- \omega\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}}\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right) - \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right)$$

$$= i\,\frac{\partial g_{rs}}{\partial z_h}$$

$$- \omega\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}}\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right) - \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right)$$

y basta ver que $\forall z_0 \in M$ existen coordenadas tales en z_0:

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial z_h}(z_0) = 0 \qquad \checkmark$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \frac{\partial}{\partial z_r}\Big|_{z_0} = 0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}$$

Para la última parte recordamos la fórmula:

$$2g(\nabla_X Y, Z) =$$
$$= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y))$$

cuando X, Y, Z conmutan entre si.

En nuestro caso:

$$2\,\omega\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}\right) =$$

$$= -2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \frac{\partial}{\partial z_r}, J\frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}\right)$$

$$= 2i\, g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_h}} \frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}\right)$$

$$= i\,\frac{\partial g_{r\bar{s}}}{\partial z_h} + i\,\frac{\partial g_{h\bar{s}}}{\partial z_r} - 0$$

que se anula en z_0 para las coordenadas de (7).

El resto de los términos se maneja similarmente para concluir que:

$$\nabla \omega = 0.$$