En lo sucesivo M es una variedad diferenciable (C^∞ o suave).

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, campo vectorial suave en M, entonces $\forall p \in M$ existe una curva integral maximal a través de M:

$$\gamma_p : I_p \longrightarrow M$$

$$\gamma_p'(t) = X_{\gamma_p(t)} \quad \forall t \in I_p$$

$$\gamma_p(0) = p$$

La maximalidad es respecto del intervalo I_p y sujeto a la condición $\gamma_p(0) = p$.

Esto define un flujo local:

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

$$\varphi(t, p) = \varphi_t(p) = \gamma_p(t)$$

donde D es abierto y $\forall t$ el mapeo

$$\varphi_t : D_t \longrightarrow \varphi_t(D) \subseteq M$$

es difeomorfismo local.

$$D_t = \{ p \in M \mid (t,p) \in D \}.$$

En particular: $\forall p \in D_t$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(p) = X_p$$

$(\varphi_t)_t$ es un grupo local uniparamétrico pues:

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad y \quad \varphi_0 = id_M$$

siempre que la composición tiene sentido.

(Ver Warner "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups", Chapter 1, Vector Fields).

Corolario:

M, $X \in \mathfrak{X}(M)$, φ_t el flujo local de X, entonces:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi_t(p) = X_{\varphi_{t_0}(p)}$$

$\forall t_0, p$.

Esto se escribe como:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_{\varphi_t} = X \circ \varphi_t.$$

Dem.:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi_t(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_{t+t_0}(p)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(\varphi_{t_0}(p)) = X_{\varphi_{t_0}(p)} \; //$$

Acción de Diff(M).

$$\mathrm{Diff}(M) = \{\varphi : M \to M \mid \varphi \text{ es difeomorfismo}\}$$

1) $$\mathrm{Diff}(M) \times M \longrightarrow M$$
$$(\varphi, p) \longmapsto \varphi(p)$$

2) $$\mathrm{Diff}(M) \times C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$
$$(\varphi, f) \longmapsto f \circ \varphi^{-1}$$

3) $$\mathrm{Diff}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(\varphi, X) \longmapsto d\varphi(X) = \varphi_*(X)$$

donde:

$$d\varphi(X) : M \longrightarrow TM$$
$$(d\varphi(X))_p = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(X_{\varphi^{-1}(p)})$$

4) α tensor k-multilineal en M: $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, $\forall p \in M$:

$$\alpha_p : T_pM \times \dots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
k-multilineal.

$$(\varphi, \alpha) \longmapsto \varphi^* \alpha$$

donde:

$$(\varphi^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_k) = \alpha_p(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k))$$

$\forall p \in M$, $v_1, \dots, v_k \in T_pM$.

Derivada de Lie:

$X \in \mathfrak{X}(M)$

La derivada de Lie L_X se define como:

$$L_X : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$
$$L_X(f) = X(f) = df(X)$$

$$X(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto X_p(f) = df_p(X_p).$$

Sobre campos vectoriales:

$$L_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$L_X(Y) = [X, Y]$$

Proposición: (2.25 (b) de Warner)

$$L_X(Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{d\varphi_{-t}(Y)_p - Y_p}{t}$$
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d\varphi_{-t}(Y)_p$$

donde φ_t es el flujo local de X.

Corolario: X campo con flujo $(\varphi_t)_t$, Y otro campo. Entonces:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} d\varphi_{-t}(Y) = d\varphi_{-t_0}(L_X(Y))$$

En particular:

$$L_X(Y) = 0 \iff d\varphi_t(Y) = Y \quad \forall t.$$

Dem.:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} d\varphi_{-t}(Y) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi_{-t-t_0}(Y)$$

$$= d\varphi_{-t_0}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi_{-t}(Y)\right)$$

$$= d\varphi_{-t_0}(L_X(Y))$$

Entonces:

$L_X(Y) = 0 \iff d\varphi_{-t}(Y)$ es constante en t.

$\iff d\varphi_t(Y) = Y$

pues $\varphi_0 = id_M$. //

En tensores multilineales:

$$L_X(\alpha)_p = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*\alpha)_p - \alpha_p}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha_{\varphi_t(p)}(d(\varphi_t)_p(\ ),\dots,d(\varphi_t)_p(\ )) - \alpha_p}{t}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^*\alpha)_p$$

Corolario: X con φ_t y α k-mult.:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi_t^*(\alpha) = \varphi_{t_0}^*(L_X(\alpha))$$

En particular:

$$L_X(\alpha) = 0 \iff \varphi_t^*(\alpha) = \alpha \quad \forall t.$$

Dem.:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi_t^*(\alpha) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_{t+t_0}^*(\alpha)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_{t_0}^*(\varphi_t^*(\alpha))$$

$$= \varphi_t^*(L_X(\alpha))$$

Entonces:

$$L_X(\alpha) = 0 \iff \varphi_t^*(\alpha) \text{ es constante en } t$$

$$\iff \varphi_t^*(\alpha) = \alpha \quad \forall t$$

pues $\varphi_0 = id_M$. //

Teorema:

Sea α un tensor multilineal en M. Si X es un campo vectorial suave con flujo local $(\varphi_t)_t$ entonces son equivalentes:

1) $L_X \alpha = 0$

2) $\varphi_t^* \alpha = \alpha \quad \forall t$

Observación:

Por el Teorema anterior, cuando ocurre:

$$L_X \alpha = 0$$

decimos que X es un automorfismo infinitesimal de α; pues en este caso cada φ_t es un automorfismo local de α.

Si $\alpha = g$ es métrica Rie_

manniana y $L_X g = 0$, entonces X se dice campo de Killing.

Formas diferenciales y su diferencial exterior.

Formas diferenciales en M:

$\Omega^k(M)$: espacio de k-formas suaves en M.

en coordenadas locales:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Para $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, en coordenadas locales tenemos:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

La diferencial exterior se define:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Esto no depende de coordenadas y:

$$d: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

Además: $d^2 = 0$.

Recordamos (ver libro de Bott-Tu)

$\omega \in \Omega^k(M)$ se dice:

cerrada $\Leftrightarrow$ $d\omega = 0$

exacta $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \ni d\alpha = \omega$

Por tanto, $d^2 = 0$ nos da:

ω exacta $\Rightarrow$ ω cerrada.

Grupos de cohomología:

$$H^k(M, \mathbb{R}) = \frac{k\text{-formas cerradas}}{k\text{-formas exactas}}.$$

Tres fórmulas fundamentales: (Ver Proposición 2.25 de Warner)

1) $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$L_X = \iota(X) \circ d + d \circ i(X)$$

2) $\omega \in \Omega^h(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$(L_X \omega)(Y_1, \dots, Y_k) =$$

$$= X(\omega(Y_1, \dots, Y_h)) - \sum_{j=1}^{h} \omega(Y_1, \dots, [X, Y_j], \dots, Y_h)$$

3) $\omega \in \Omega^h(M)$:

$$d\omega(Y_0, \dots, Y_h) =$$

$$= \sum_{i=0}^{h} (-1)^i Y_i(\omega(Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, Y_h)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, \widehat{Y_j}, \dots, Y_h)$$