

Grupos de Lie y Geometría Diferencial: Parte 1

Geometrías Elementales y Grupos Ortogonales

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Geometría y Topología 2025
8–11 de abril de 2025

- 1 Geometrías Elementales
- 2 Isometrías, Geodésicas y Grupos Ortogonales
- 3 Transporte Paralelo
- 4 Curvatura

1 Geometrías Elementales

- El espacio $\mathbb{R}^n$
- La esfera S^n
- El espacio hiperbólico H^n

2 Isometrías, Geodésicas y Grupos Ortogonales

3 Transporte Paralelo

4 Curvatura

- ◇ El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ sirve de modelo para toda objeto geométrico.
- ◇ Una variedad n -dimensional es un espacio localmente homeomorfo/difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- ◇ El producto interno natural de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

define la geometría euclidea.

- ◇ Las curvas más cortas entre dos puntos son los segmentos de recta.
- ◇ Dada una recta L y un punto p fuera de L , existe una única recta paralela a L que pasa por p .

- ◇ La esfera n -dimensional es $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$.
- ◇ Localmente, S^n es la gráfica de una función suave $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Por tanto, es una variedad n -dimensional.
- ◇ El espacio tangente a S^n en uno de sus puntos p es dado por $T_p S^n = (\mathbb{R}p)^\perp$.
- ◇ La esfera S^n hereda de $\mathbb{R}^{n+1}$ el producto interno en sus espacios tangentes.
- ◇ Las curvas localmente más cortas en S^n son los círculos máximos

$$C = S^n \cap P, \quad P \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ plano que pasa por el origen.}$$

Las llamamos geodésicas.

- ◇ Cualesquiera dos geodésicas se intersectan. No existen paralelas entre las geodésicas.

- ◇ Un modelo del espacio hiperbólico se obtiene de $\mathbb{R}^{n+1}$ con el producto interno

$$\langle x, y \rangle_{n,1} = \sum_{j=1}^n x_j y_j - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Notación: $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1})$.

- ◇ El espacio hiperbólico H^n es una componente conexa de la *esfera de radio al cuadrado -1* en $\mathbb{R}^{n,1}$

$$H^n = \{p \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle p, p \rangle_{n,1} = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

- ◇ H^n es la gráfica de una función suave $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Por tanto, H^n es una variedad.
- ◇ El espacio tangente a H^n en uno de sus puntos p es dado por $T_p H^n = (\mathbb{R}p)^{\perp_{n,1}}$, complemento ortogonal respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$.

- ◇ El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$ restringido a los espacios tangentes de H^n es definido positivo.
- ◇ En H^n podemos medir ángulos y longitudes.
- ◇ Las curvas más cortas en H^n son las hipérbolas máximas

$$L = H^n \cap P, \quad P \subset \mathbb{R}^{n,1} \text{ plano que pasa por el origen.}$$

Las llamamos geodésicas.

- ◇ Si $L \subset H^n$ es una geodésica y p es un punto fuera de L , entonces existe una infinidad de geodésicas paralelas a L que pasan por p .

- 1 Geometrías Elementales
- 2 Isometrías, Geodésicas y Grupos Ortogonales
 - Movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$
 - El grupo $O(n+1)$ y la esfera S^n
 - El grupo $O(n,1)$ y el espacio hiperbólico H^n
- 3 Transporte Paralelo
- 4 Curvatura

Movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$

- ◇ Denotamos
 - ▶ $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^\top A = I_n\},$
 - ▶ $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}.$
- ◇ Los difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservan ángulos y longitudes de curvas se llaman isometrías. Estas son dadas por el grupo $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ actuando sobre $\mathbb{R}^n$ por

$$(A, v) \cdot p = Ap + v.$$

El producto es semidirecto.

- ◇ Decimos que el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ es dado por $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.
- ◇ Las isometrías de $\mathbb{R}^n$ preservan rectas.
- ◇ El subgrupo de isometrías que fijan al origen 0 es $O(n)$.
- ◇ Las rectas en $\mathbb{R}^n$ se parametrizan como $t \mapsto p_0 + tv_0$. Por tanto, son órbitas de los subgrupos

$$\{(I_n, tv_0) : t \in \mathbb{R}\} \subset O(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

que son complementarios a $O(n)$.

El grupo $O(n+1)$ y la esfera S^n

- El grupo $O(n+1)$ preserva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y por tanto a la esfera S^n .
- Los difeomorfismos de S^n que preservan ángulos y longitudes de curvas son dados por $O(n+1)$ actuando sobre S^n por

$$A \cdot p = Ap.$$

El grupo de isometrías de S^n es dado por $O(n+1)$.

- Las isometrías de S^n preservan geodésicas.
- El subgrupo de isometrías que fija al polo norte e_{n+1} es $O(n)$.
- Las geodésicas de S^n se parametrizan como

$$t \mapsto \cos(t)p_0 + \sin(t)v_0,$$

donde $p_0 \in S^n$ y p_0, v_0 es ortonormal. Por tanto, son órbitas de subgrupos de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

respecto de una base ortonormal $(p_0, v_0, \dots)$.

- ◇ Denotamos

$$I_{n,1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de modo que $\langle x, y \rangle_{n,1} = x^\top I_{n,1} y$.

- ◇ Para $\mathbb{R}^{n,1}$ consideramos

- ▶ $O(n, 1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) : A^\top I_{n,1} A = I_{n,1}\},$
- ▶ $O_+(n, 1) = \{A \in O(n, 1) : (Ae_{n+1})_{n+1} > 0\},$
- ▶ $SO_0(n, 1) = \{A \in O_+(n, 1) : \det(A) = 1\}.$

- ◇ Los difeomorfismos de H^n que preservan ángulos y longitudes de curvas vienen de $O_+(n, 1)$ actuando sobre H^n por

$$A \cdot p = Ap.$$

El grupo de isometrías de H^n es dado por $O_+(n, 1)$.

- ◇ Las isometrías de H^n preservan geodésicas.
- ◇ El subgrupo de isometrías que fijan al vértice e_{n+1} es $O(n)$.
- ◇ Las geodésicas de H^n se parametrizan como

$$t \mapsto \cosh(t)p_0 + \sinh(t)v_0,$$

donde $p_0 \in H^n$ y p_0, v_0 es ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$. Por tanto, son órbitas de subgrupos de la forma

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

respecto de una base ortonormal $(p_0, v_0, \dots)$ para $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$.

- 1 Geometrías Elementales
- 2 Isometrías, Geodésicas y Grupos Ortogonales
- 3 Transporte Paralelo
 - Distinguiendo las geometrías elementales
 - Transporte paralelo en variedades Riemannianas
 - Transporte paralelo en S^n
 - Transporte paralelo en H^n
- 4 Curvatura

- ◇ ¿Cómo distinguimos geométricamente entre $\mathbb{R}^n$, S^n y H^n ?
- ◇ El comportamiento de las geodésicas los distingue.
- ◇ En estos casos, las geodésicas se obtienen aplicando isometrías. Podemos usar isometrías para desplazar vectores y planos tangentes.
- ◇ Otra alternativa es la una noción de transporte paralelo.

- ◇ En $\mathbb{R}^n$ tenemos una noción natural de mover paralelamente un vector. Esto corresponde a campos vectoriales constantes, lo cual ocurre cuando la derivada es constante.
- ◇ Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, dado un campo vectorial $t \mapsto X_t$ a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow M$ definimos su *derivada en M* mediante el siguiente proceso
 - ▶ derivamos $t \mapsto X_t$ como función a valores en $\mathbb{R}^n$: $\frac{d}{dt}X_t$,
 - ▶ proyectamos $\frac{d}{dt}X_t$ en los espacios tangentes a M : $\frac{\nabla}{dt}X_t$.
- ◇ $\frac{\nabla}{dt}X_t$ es conocido como la *derivada covariante de X en M* .
- ◇ El campo vectorial X a lo largo de una curva γ se dice *paralelo a lo largo de γ* cuando se cumple $\frac{\nabla}{dt}X_t \equiv 0$.
- ◇ En $\mathbb{R}^n$ un campo vectorial es paralelo si y sólo si es constante.

- Los espacios tangentes a S^n cambian de dirección en $\mathbb{R}^{n+1}$.
- En general, un campo vectorial constante no es tangente a S^n .
- La geodésica $\gamma(t) = \cos(t)p_0 + \sin(t)v_0$ tiene campo vectorial de velocidad $\gamma'(t) = -\sin(t)p_0 + \cos(t)v_0$, tangente a S^n .
- La aceleración de γ en $\mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\gamma''(t) = -\cos(t)p_0 - \sin(t)v_0,$$

que se mantiene perpendicular a S^n .

- La derivada covariante de γ' es $\ddot{\gamma} = \frac{\nabla}{dt}\gamma' \equiv 0$.
- Si $u_0 \perp \{p_0, v_0\}$, entonces $X_t \equiv u_0$ es tangente a S^n a lo largo de la geodésica γ . Además, se cumple $\frac{\nabla}{dt}X \equiv 0$.
- Esto define el transporte paralelo a lo largo de γ .

- La geodésica $\gamma(t) = \cos(t)p_0 + \sin(t)v_0$ es la órbita de p_0 respecto del grupo de matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Cada $A(t)$ es lineal y, por tanto, igual a su diferencial.
- De lo cual calculamos
 - $\blacktriangleright dA(t)_{p_0}(v_0) = A(t)v_0 = \gamma'(t),$
 - $\blacktriangleright dA(t)_{p_0}(u_0) = A(t)u_0 = u_0 = X_t, (u_0 \perp \{p_0, v_0\}).$
- El transporte paralelo a lo largo de geodésicas es dado por isometrías.

- ◇ El espacio H^n se comporta similarmente a la esfera S^n .
- ◇ En general, un campo constante no es tangente a H^n .
- ◇ La geodésica $\gamma(t) = \cosh(t)p_0 + \sinh(t)v_0$ satisface

$$\gamma'(t) = \sinh(t)p_0 + \cosh(t)v_0,$$

$$\gamma''(t) = \cosh(t)p_0 + \sinh(t)v_0.$$

que son tangente y perpendicular (¡en $\mathbb{R}^{n,1}$!) a H^n , respectivamente.

- ◇ La derivada covariante de γ' es $\ddot{\gamma} = \frac{\nabla}{dt}\gamma' \equiv 0$.
- ◇ Si $u_0 \perp_{n,1} \{p_0, v_0\}$, entonces el campo constante $X_t \equiv u_0$ es paralelo.
- ◇ Esto define el transporte paralelo a lo largo de γ .

- La geodésica $\gamma(t) = \cosh(t)p_0 + \sinh(t)v_0$ es la órbita de p_0 respecto del grupo de matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Como antes calculamos
 - ▶ $dA(t)_{p_0}(v_0) = A(t)v_0 = \gamma'(t)$,
 - ▶ $dA(t)_{p_0}(u_0) = A(t)u_0 = u_0 = X_t, (u_0 \perp_{n,1} \{p_0, v_0\})$.
- El transporte paralelo a lo largo de geodésicas es dado por isometrías.

- 1 Geometrías Elementales
- 2 Isometrías, Geodésicas y Grupos Ortogonales
- 3 Transporte Paralelo
- 4 **Curvatura**
 - Curvatura a través de geodésicas
 - Curvatura de S^n
 - Curvatura de H^n
 - Espacios simétricos y grupos de Lie

- ◇ ¿Cómo medir la discrepancia entre $\mathbb{R}^n$ y los espacios S^n y H^n ?
- ◇ A lo largo de geodésicas por pedazos
 - ▶ el transporte paralelo en $\mathbb{R}^n$ es el mapeo identidad,
 - ▶ el transporte paralelo para ambos S^n y H^n rota vectores.
- ◇ Para cada $p_0 \in S^n$ y $T \in \text{SO}(T_{p_0}S^n)$, existe una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$ en S^n tal que el transporte paralelo a lo largo de γ de p_0 a p_0 es dado por T .
- ◇ La misma propiedad se cumple en H^n .
- ◇ Por otro lado, las geodésicas que emergen de un punto dado
 - ▶ se separan linealmente en $\mathbb{R}^n$,
 - ▶ se aproximan en S^n ,
 - ▶ se alejan de manera no lineal en H^n .

- En $\mathbb{R}^n$ consideramos la *variación geodésica* de la recta $t \mapsto p_0 + tv_0$ dada por

$$\varphi(t, s) = p_0 + t(v_0 + su_0).$$

- La separación entre las rectas se mide a través del *campo de Jacobi*

$$J(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, 0) = tu_0.$$

- Dado que J es lineal en la perturbación u_0 , encontramos que las rectas en $\mathbb{R}^n$ se separan linealmente.
- $J'' = \ddot{J} \equiv 0$ nos dice que $\mathbb{R}^n$ tiene curvatura cero/nula.

- ♦ Sea M una variedad Riemanniana, por lo cual podemos considerar geodésicas.
- ♦ Dada una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma'(0) = v_0$, una variación geodésica es una función $\varphi : I \times (-r, r) \rightarrow M$ tal que
 - ▶ $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$,
 - ▶ para cada s , la curva $t \mapsto \varphi(t, s)$ es una geodésica tal que $\varphi(0, s) = p_0$.
- ♦ El *campo de Jacobi a lo largo de γ* asociado a φ se define por

$$J(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, 0),$$

donde $t \in I$.

- ♦ El campo de Jacobi J permite medir la curvatura de M a lo largo de γ en las direcciones tangentes $\gamma'(t)$ y $J(t)$.

- ◊ Dado un campo de Jacobi J a lo largo de la geodésica γ , la segunda derivada covariante $\ddot{J}$ mide la curvatura.
- ◊ La curvatura de M es el único tensor R que a cada punto $p \in M$ asigna un operador lineal

$$R_p : \wedge^2 T_p M \rightarrow \text{End}(T_p M),$$

tal que

- ▶ $\ddot{J} + R(J, \gamma')\gamma' = 0$, para todo campo de Jacobi J a lo largo de una geodésica γ ,
- ▶ R satisface las siguientes simetrías
 - ◉ $R(u, v) = -R(v, u)$
 - ◉ $R(u, v)$ es anti-simétrico,
 - ◉ $\langle R(u, v)x, y \rangle = \langle R(x, y)u, v \rangle$.

- ♦ Sean $p_0 \in S^n$ y $v_0, u_0 \in T_{p_0}S^n$ un par ortonormal.
- ♦ Para la geodésica $\gamma(t) = \cos(t)p_0 + \sin(t)v_0$ consideramos la variación geodésica

$$\varphi(t, s) = \cos(t)p_0 + \sin(t) \frac{v_0 + su_0}{\sqrt{1+s^2}}.$$

- ♦ El campo de Jacobi y sus derivadas covariantes son

$$J(t) = \sin(t)u_0, \quad \dot{J}(t) = -\cos(t)u_0, \quad \ddot{J}(t) = -\sin(t)u_0.$$

- ♦ Periódicamente, las geodésicas se acercan y se alejan.
- ♦ El tensor de curvatura R de S^n es

$$R_p(u, v)w = \langle w, v \rangle u - \langle w, u \rangle v,$$

para $p \in S^n$ y $u, v, w \in T_pS^n$.

- Para obtener un valor numérico a partir de R , definimos la *curvatura seccional* $K(\Pi)$ de una variedad Riemanniana M en el plano tangente Π generado por dos vectores $u, v \in T_p M$ por

$$K(\Pi) = K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{\text{Area}(P)},$$

donde P es el paralelogramo generado por u, v .

- Normalizamos por el área para obtener un número que depende solamente del plano P .

- ◇ Si $v_0, u_0 \in T_{p_0}S^n$ es un par ortonormal, entonces

$$K(v_0, u_0) = 1.$$

- ◇ Recordamos que el área de un paralelogramo es el determinante de la matriz de productos internos de sus aristas.
- ◇ La esfera tiene curvatura constante S^n .
- ◇ Similarmente rS^n (la esfera de radio $r > 0$) tiene curvatura $\frac{1}{r^2}$.

Curvatura de H^n

- ◊ Sean $p_0 \in H^n$ y $v_0, u_0 \in T_{p_0}H^n$ un par ortonormal.
- ◊ Para la geodésica $\gamma(t) = \cosh(t)p_0 + \sinh(t)v_0$ consideramos la variación geodésica

$$\varphi(t, s) = \cosh(t)p_0 + \sinh(t) \frac{v_0 + su_0}{\sqrt{1+s^2}}.$$

- ◊ El campo de Jacobi y sus derivadas covariantes son

$$J(t) = \sinh(t)u_0, \quad \dot{J}(t) = \cosh(t)u_0, \quad \ddot{J}(t) = \sinh(t)u_0.$$

- ◊ Las geodésicas se separan con crecimiento exponencial.
- ◊ El tensor de curvatura R de H^n es

$$R_p(u, v)w = -\langle w, v \rangle_{n,1}u + \langle w, u \rangle_{n,1}v,$$

para $p \in H^n$ y $u, v, w \in T_pH^n$.

- ◊ La curvatura seccional de H^n es constante -1 .

- ◇ Es fácil verificar que el tensor de curvatura R , para ambos S^n y H^n satisface la siguiente condición

$$R_{Ap}(Au, Av)Aw = A(R_p(u, v)w),$$

para cualquier A en el grupo ortogonal del correspondiente espacio tangente.

- ◇ Para S^n y H^n el transporte paralelo a lo largo de geodésicas es dado por isometrías. Por tanto, R es invariante bajo transporte paralelo y entonces

$$\frac{\nabla}{dt}R \equiv 0,$$

a lo largo de cualquier curva.

- ◇ Los espacios $\mathbb{R}^n$, S^n y H^n definen geometrías con tensor de curvatura paralelo.

- ◇ Problema: Determinar todas las variedades Riemannianas cuyo tensor de curvatura es paralelo.
- ◇ Solución: Teoría de Cartan de espacios Riemannianos simétricos y teoría de Killing de grupos de Lie semisimples.