Grupos de Lie y Geometría Diferencial: Parte 2
Espacios Simétricos y Grupos de Lie

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Geometría y Topología 2025
8–11 de abril de 2025

- Una variedad Riemanniana se dice completa si las geodésicas no terminan en tiempo finito: están definidas sobre $\mathbb{R}$.
- Un *espacio Riemanniano simétrico* es una variedad Riemanniana completa cuyo tensor de curvatura es invariante bajo transporte paralelo, i.e. tiene derivada covariante cero.
- Propiedades (no triviales) de una variedad Riemanniana M.
  - El grupo de isometrías es un *grupo de Lie*.
  - El subgrupo de isometrías que fijan algún punto es compacto.

- Si M es Riemanniano simétrico, se cumplen además las siguientes propiedades.
  - M es homogéneo: el grupo de isometrías actua transitivamente. En este caso, podemos escribir
  $$M \simeq G/K,$$
  donde G es el grupo de isometrías y K es el subgrupo de aquellas que fijan un punto dado p_0.
  - Las geodésicas son órbitas de subgrupos de isometrías.
  - El transporte paralelo es dado por los correspondientes subgrupos de isometrías.
  - Para cada punto p_0 existe una isometría (local) que fija a p_0 y que invierte la dirección de las geodésicas a través de p_O.
- La teoría de espacios Riemannianos simétricos fue desarrollada por Cartan, y su estudio es accesible a través del libro "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces" de Helgason.
- Abordaremos algunos aspectos de estos espacios mediante ejemplos.

- Sea $\mathbb{K}$ uno de los siguientes anillos de división: $\mathbb{R}$ (reales), $\mathbb{C}$ (complejos), $\mathbb{H}$ (cuaternios).
- Denotamos $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, el grupo de elementos invertibles.
- En $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ definimos la relación de equivalencia

$$u \sim v \Longleftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{K}^* \text{ tal que } u = vx.$$

- Para cada $u \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, la clase de equivalencia $[u]$ representa la $\mathbb{K}$-recta generada por u.
- El *espacio proyectivo n-dimensional* sobre $\mathbb{K}$ es el conjunto $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ de clases de equivalencia.
- El espacio $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ resulta ser Riemanniano simétrico.

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tenemos un recubrimiento doble $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dado por $u \mapsto [u]$.
- Los espacios proyectivos reales son Riemannianos simétricos.
- Para los casos complejo y cuaterniónico es útil considerar grupos matriciales.

- Consideramos los casos en que $\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.
- El espacio vectorial $\mathbb{K}^{n+1}$ admite el producto Hermitiano

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} \overline{u}_j v_j.$$

- El grupo unitario asociado a $\mathbb{K}^{n+1}$ se define como

$$\mathrm{U}(\mathbb{K}, n+1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{K}) : A^*A = I_{n+1}\}.$$

- Se acostumbra denotar $\mathrm{U}(n+1)$ para $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Sp}(n+1)$ para $\mathbb{H}$.

- Consideramos la acción $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n+1) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definida por
$$A[u] = [Au],$$
es decir, mapeando $\mathbb{K}$-linealmente rectas en rectas.
- Esta acción es transitiva.
- El subgrupo que deja fijo a la recta $[e_{n+1}]$ es
$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : A \in \mathrm{U}(\mathbb{K}, n), a \in \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1) \right\} \simeq \mathrm{U}(\mathbb{K}, n) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1).$$
- Tenemos una identidad de conjuntos
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{U}(\mathbb{K}, n+1) / \big(\mathrm{U}(\mathbb{K}, n) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1)\big).$$
- Es posible construir la estructura de variedad y la geometría a partir de estos cocientes.

- Hay dos alternativas para definir la geometría en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
  - Teoría de Lie: Probar que $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n+1)$ es variedad y que lo mismo ocurre con el cociente. Construir una métrica Riemanniana a través de la acción.
  - Geometría elemental: Utilizar esferas S^n para construir objetos geométricos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
- La primera opción motiva el estudio de grupos de Lie. Veremos que la segunda opción nos permite definir algunas propiedades geométricas.

- Sea $v_1, \dots, v_{n+1}$ una base ortonormal de $\mathbb{K}^{n+1}$.
- La base dada induce inclusiones

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1} & \mathrm{O}(n+1) &\hookrightarrow \mathrm{U}(\mathbb{K}, n+1) \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \sum_{j=1}^{n+1} v_j x_j & A &\mapsto A. \end{aligned}$$

- La primera inclusión induce mapeos

$$S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}).$$

- La segunda inclusión mapea $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n) \times \mathbb{Z}_2$ inyectivamente en $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1)$, lo cual induce mapeos

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) &\to \mathrm{O}(n+1)/\big(\mathrm{O}(n) \times \mathbb{Z}_2\big) \\ &\hookrightarrow \mathrm{U}(\mathbb{K}, n+1)/\big(\mathrm{U}(\mathbb{K}, n) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1)\big). \end{aligned}$$

- Ya sea por definición o constructivamente, el mapeo entre espacios nos lleva a
  - las geodésicas en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ se obtienen de geodésicas en S^n,
  - el transporte paralelo en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, en ciertos casos, se puede obtener del transporte paralelo en S^n.
- *Sin embargo*, la curvatura seccional de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ cubre el intervalo $[1, 4]$ en los casos complejo ($n \geq 2$) y cuaterniónico.
- El mapeo entre cocientes de grupos nos lleva a considerar los mapeos entre grupos que nos interesan: homomorfismos de grupos de Lie.

- En el espacio $\mathbb{K}^{n+1}$ definimos el producto semi-Hermitiano

$$\langle u, v\rangle_{n,1} = \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j v_j - \overline{u}_{n+1} v_{n+1} = u^* I_{n,1} v$$

- Denotamos con $\mathbb{K}^{n,1}$ el espacio $\mathbb{K}^{n+1}$ dotado de este producto.
- El grupo unitario asociado a $\mathbb{K}^{n,1}$ se define como

$$\mathrm{U}(\mathbb{K}, n, 1) = \{M \in M_{n+1}(\mathbb{K}) : M^* I_{n,1} M = I_{n,1}\}.$$

- Se acostumbra denotar $\mathrm{U}(n, 1)$ para $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Sp}(n, 1)$ para $\mathbb{H}$.

- Una $\mathbb{K}$-recta $[u] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ se dice definida negativa cuando $\langle u, u \rangle_{n,1} < 0$.
- El *espacio hiperbólico n-dimensional* sobre $\mathbb{K}$ es el subespacio $H^n(\mathbb{K})$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ que consta de las $\mathbb{K}$-rectas definidas negativas.
- El espacio $H^n(\mathbb{K})$ resulta ser Riemanniano simétrico.

- Los espacios hiperbólicos satisfacen las siguientes propiedades.
  - $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n, 1)$ actúa transitivamente sobre $H^n(\mathbb{K})$ y el subgrupo que deja fijo a $[e_{n+1}]$ es $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1)$, de modo que
$$H^n(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{U}(\mathbb{K}, n, 1)/\big(\mathrm{U}(\mathbb{K}, n) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, 1)\big).$$
  - $H^n(\mathbb{R}) = H^n$.
  - Existen mapeos $H^n \hookrightarrow H^n(\mathbb{K})$ que permiten definir/estudiar la geometría de $H^n(\mathbb{K})$.
  - La curvatura seccional de $H^n(\mathbb{K})$ cubre el intervalo $[-4, -1]$.
- Los espacios $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ y $H^n(\mathbb{K})$ son llamados Riemannianos simétricos *duales*.

- La *variedad Grassmanniana* $\mathrm{Gr}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ($m < n$) es el conjunto de $\mathbb{K}$-subespacios m-dimensionales en $\mathbb{K}^n$.
- En $\mathbb{K}^n$ definimos el producto semi-Hermitiano ($m < n$)

$$\langle u, v\rangle_{n-m,m} = \sum_{j=1}^{n-m} \overline{u}_j v_j - \sum_{j=n-m+1}^{n} \overline{u}_j v_j = u^* I_{n-m,m} v,$$

cuyo grupo de isometrías se denota por $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n-m, m)$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathrm{O}(k, l)$. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathrm{U}(k, l)$. $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: $\mathrm{Sp}(k, l)$.
- El espacio dual de $\mathrm{Gr}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ es el subconjunto de $\mathrm{Gr}^-(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ de $\mathbb{K}$-subespacios m-dimensionales definidos negativos para $\langle \cdot, \cdot\rangle_{n-m,m}$.
- En este caso tenemos

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathrm{U}(\mathbb{K}, n)/\big(\mathrm{U}(\mathbb{K}, n-m) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, m)\big)$$
$$\mathrm{Gr}^-(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathrm{U}(\mathbb{K}, n-m, m)/\big(\mathrm{U}(\mathbb{K}, n-m) \times \mathrm{U}(\mathbb{K}, m)\big).$$

1. Espacios simétricos

2. Grupos de Lie
   - Grupos de Lie a través de geometría
   - Grupos de Lie, homomorfismos y subgrupos
   - Ejemplos de grupos de Lie
   - Grupos de simetrías

3. Álgebras de Lie de Grupos de Lie

- La discusión anterior muestra la necesidad de estudiar
  - grupos con estructura diferenciable,
  - homomorfismos diferenciables entre grupos,
  - clasificación de grupos,
  - alternativas lineales de grupos.
- Sistematizar lo anterior requiere la noción de variedad diferenciable.

- Un conjunto M es una *variedad diferenciable n-dimensional* cuando aparece en alguno de los siguientes casos
  - $M \subset \mathbb{R}^m$ es localmente gráfica de funciones diferenciables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-n}$.
  - M es un espacio métrico separable, localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con cambios de coordenadas difeomorfos.
- En ambos casos contamos con sistemas de coordenadas diferenciables.
- Además tenemos la noción de funciones $f : M \to N$ diferenciables entre variedades.
- Por su naturaleza local, todo el cálculo diferencial se extiende a variedades diferenciables.

- Un *grupo de Lie* G es un grupo con estructura de variedad diferenciable tal que las operaciones de grupo son diferenciables.
- Un *homomorfismo de grupos de Lie* es una función $\varphi : G \to H$ que es diferenciable y preserva productos: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Si G, H son grupos de Lie, decimos que H *es subgrupo de Lie de* G si existe un homomorfismo (fijo) $\varphi : H \to G$ que es inyectivo. Se suele escribir $H \subset G$, donde la inclusión se considera a través de φ.

- Si G es un grupo de Lie, entonces la componente conexa G_0 que contiene al elemento identidad es un subgrupo de Lie.
- El recubrimiento universal de un grupo de Lie es grupo de Lie.
- Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G, entonces H es grupo de Lie y subgrupo de Lie de G.
- Si un homomorfismo de grupos de Lie es inyectivo, entonces su diferencial es inyectiva en todo punto.
- Todo homomorfismo continuo entre grupos de Lie es diferenciable.
- Existen subgrupos de Lie $H \subset G$ que no son cerrados ni poseen la topología inducida.
- Si $H \subset G$ es subgrupo de Lie cerrado, entonces G/H admite una única estructura de variedad diferenciable tal que la acción $G \times G/H \to G/H$ es diferenciable.

- El grupo general lineal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ es el subconjunto de matrices invertibles en $M_n(\mathbb{K})$. Es un subconjunto abierto.
- Todo subgrupo (en el sentido algebraico) G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ que es además cerrado es grupo de Lie.
- Ejemplos de grupos de Lie:
  - $\mathbb{K}^n$ con la estructura aditiva.
  - $\mathbb{K}^*$ con la estructura multiplicativa.
  - $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq S^1$ y $\mathbb{T}^n$.
  - $\mathrm{Sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} \simeq S^3$.
  - Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$.
  - $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n)$ y $\mathrm{U}(\mathbb{K}, n - m, m)$.
- El recubrimiento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *no es grupo matricial*.

- Un *grupo topológico* G es un grupo con una topología Hausdorff cuyas operaciones son continuas.
- Todo grupo de Lie es grupo topológico.
- Ejemplos de grupos topológicos.
  - Si M es una variedad Riemanniana, entonces el grupo $I(M)$ de isometrías de M es grupo de Lie de manera *única natural*.
  - Si M es una variedad simpléctica, entonces el grupo de simplectomorfismos *no es grupo de Lie*.
  - Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces el grupo de operadores unitarios (biyectivos que preservan el producto interno) es grupo topológico pero *no es grupo de Lie*.

- Los grupos de biholomorfismos de $\mathbb{C}$ y del disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ son grupos de Lie, cocientes de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ y $\mathrm{U}(1, 1)$, respectivamente.
- Sea $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ la bola unidad compleja.
  - El grupo de biholomorfismos de $\mathbb{B}^n$ es dado por la acción de $\mathrm{U}(n, 1)$ mediante transformaciones de Möbius.
  - Existe una única (salvo normalización) métrica Riemanniana en $\mathbb{B}^n$ invariante bajo $\mathrm{U}(n, 1)$, y define un modelo para $H^n(\mathbb{C})$.
  - Las isometrías de $\mathbb{B}^n$ son todas dadas por $\mathrm{U}(n, 1)$ más la conjugación.

- En todo grupo de Lie existe un tipo especial de curvas.
- Si G es grupo de Lie, denotamos con $\mathfrak{g} = T_e G$ su espacio tangente en el elemento identidad e.
- Para todo $X \in \mathfrak{g}$ existe un único homomorfismo diferenciable $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ tal que $\gamma_X'(0) = X$. La curva γ_X es llamada un *subgrupo uniparamétrico*.
- El *mapeo exponencial de un grupo de Lie G* es la función $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definida por $\exp(X) = \gamma_X(1)$, y satisface
  - $\exp(tX) = \gamma_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{g}$,
  - exp es diferenciable,
  - $d(\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \to T_e G = \mathfrak{g}$ es el mapeo identidad y, por tanto, exp es un difeomorfismo de una vecindad de 0 en $\mathfrak{g}$ sobre un vecindad de e en G.

- Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Por unicidad de los subgrupos uniparamétricos tenemos $\varphi(\exp_G(X)) = \exp_H(d\varphi(X))$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "\exp_G"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_H"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

- En la flecha inferior se preserva el producto de grupos. ¿Podemos definir una estructura algebraica en $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ que sea preservada por la flecha superior?
- Respuesta: Sí, mediante la estructura de álgebras de Lie.

- Dado un grupo de Lie G podemos realizar las siguientes construcciones.
  - G actúa sobre si mismo por conjugación: $C_x(g) = xgx^{-1}$.
  - Para cada $x \in G$, la diferencial $\mathsf{d}(C_x)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es invertible. Por la regla de la cadena y la identidad $C_{xy} = C_x \circ C_y$ el mapeo

$$\mathrm{Ad}_G : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$
$$\mathrm{Ad}_G(x) = \mathsf{d}(C_x)_e,$$

    es un homomorfismo de grupos de Lie. Ad_G es llamado la *representación adjunta de G*.
  - Al derivar Ad_G en la identidad obtenemos el mapeo

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}(\mathfrak{g})$$
$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) = \mathsf{d}(\mathrm{Ad})_e(X),$$

    el cual es llamado la *representación adjunta de $\mathfrak{g}$*.

- Si G es un grupo de Lie, el *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G es el espacio $\mathfrak{g} = T_e G$ dotado de la operación $\mathbb{R}$-bilineal $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] := \mathrm{ad}(X)(Y),$$

  y llamada *corchetes de Lie*.
- Se cumple la propiedad esperada:
  Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces $d\varphi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un *homomorfismo de álgebras de Lie*, es decir:

$$d\varphi_e([X, Y]) = [d\varphi_e(X), d\varphi_e(Y)].$$

- El mapeo exponencial de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es la exponencial matricial

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

- Calculamos ad para $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
    - $C_A(X) = AXA^{-1}$.
    - Como C_A es lineal: $\mathrm{Ad}(A)(X) = \mathrm{d}\,(C_A)_e(X) = AXA^{-1}$.
    - Por la regla de la cadena, la operación bilineal

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(X))(Y) &= \big(\mathrm{d}\,(\mathrm{Ad})_e(X)\big)(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \exp(tX)\,Y\exp(-tX) = XY - YX,\end{aligned}$$

es el conmutador de matrices. Esto define el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ cuyos corchetes son $[X,Y] = XY - YX$.

- Si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es subgrupo de Lie, entonces
  - G hereda el mapeo exponencial matricial,
  - $\mathfrak{g}$ hereda los corchetes como conmutador matricial.
- Si G es un grupo de Lie abstracto, entonces
  - $\mathfrak{g}$ se identifica con los campos vectoriales en G invariantes por la izquierda,
  - los corchetes en $\mathfrak{g}$ son el conmutador de campos vectoriales como operadores diferenciales,
  - el mapeo exponencial depende de la estructura de G.