# Grupos de Lie y Geometría Diferencial: Parte 3
# Álgebras de Lie

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Guanajuato

Escuela Temática de Geometría y Topología 2025
8–11 de abril de 2025

- En lo sucesivo consideramos espacios vectoriales reales y complejos.
- En un espacio vectorial $\mathfrak{g}$, decimos que un mapeo bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ define *corchetes de Lie* si satisface las siguientes propiedades
    - (Anti-simetría) $[X, Y] = -[Y, X]$,
    - (Identidad de Jacobi) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.
- En este caso decimos que $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.
- Si $V \subset \mathfrak{g}$, entonces $[V, V]$ denota el subespacio de combinaciones lineales de elementos $[X, Y]$ con $X, Y \in V$.
- Algunas nociones básicas.
    - Una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Escribimos $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$.
    - Un ideal de $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h}$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Escribimos $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.
    - Un mapeo lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se dice homomorfismo de álgebras de Lie si satisface $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$.

- Cierto "abstract non-sense" se satisface para las álgebras de Lie abstractas.
  - Si $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ posee una única estructura de álgebra de Lie tal que el mapeo cociente $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es homomorfismo.
  - (Primer teorema de isomorfismos) Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es suprayectiva, entonces $\varphi$ induce un isomorfismo $\mathfrak{g}/\ker(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{h}$.
  - Segundo y tercer teoremas de isomorfismos se cumplen.

- Dada la anti-simetría, la identidad de Jacobi es equivalente a

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]].$$

- Una *derivación* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un mapeo lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)]$.
- La *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$ es el mapeo lineal $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ dado por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Y) = [X,Y]$.
- La representación adjunta $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. ($\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ con corchetes dados por el conmutador de transformaciones)
- Más aún, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$ para cada $X \in \mathfrak{g}$.

- Ejemplos de álgebras de Lie.
  - Álgebra de Lie de un grupo de Lie.
  - Álgebras de Lie de subgrupos de Lie en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
  - Subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.
- (Teorema de Ado) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie (de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces existe un homomorfismo inyectivo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Es decir, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

- Sea $G$ un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
  - Si $H \subset G$ es subgrupo de Lie, entonces $\mathfrak{h}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.
  - Si $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ es subálgebra de Lie, entonces existe un único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. $H$ no necesariamente es subespacio topológico.
  - Si $H \subset G$ es subgrupo conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, entonces $H$ es normal en $G$ si y sólo si $\mathfrak{h}$ es ideal de $\mathfrak{g}$.
- Sean $G, H$ grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, respectivamente.
  - Si $\varphi : G \to H$ es un isomorfismo, entonces $\mathrm{d}\varphi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es isomorfismo.
  - Si $\widehat{\varphi} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un isomorfismo y $G, H$ son simplemente conexos, entonces existe un isomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $\mathrm{d}\varphi_e = \widehat{\varphi}$.

- Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existe un grupo de Lie $G$ conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se puede suponer que es simplemente conexo.
- Sean $G, H$ grupos de Lie conexos con álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.
  - $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$.
  - $\widetilde{G} \simeq \widetilde{H}$ (recubrimientos universales).
  - Existe $L$ un grupo de Lie simplemente conexo y subgrupos discretos centrales $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset L$ tales que $G \simeq L/\Gamma_1$ y $H \simeq L/\Gamma_2$.
- La clasificación de los grupos de Lie conexos se reduce a
  - clasificar las álgebras de Lie (de dimensión finita),
  - clasificar los subgrupos discretos centrales de grupos de Lie.
- Hay dos tipos especiales de álgebras de Lie: solubles y semisimples.

1. Álgebras de Lie

2. Álgebras de Lie Solubles
   - Álgebra derivada
   - (Imposibilidad de) la clasificación de álgebra de Lie solubles

3. Álgebras de Lie Semisimples

- El álgebra de Lie más sencilla es la trivial (en cada dimensión): $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ con $[\cdot,\cdot] \equiv 0$. Decimos que $\mathfrak{g}$ es Abeliana.
- En un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el *álgebra derivada* es $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. El cociente de $\mathfrak{g}$ que es Abeliano más grande es $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.
- Problemas: Determinar que tan cerca $\mathfrak{g}$ está de ser Abeliana. Tratar de reconstruir $\mathfrak{g}$ a partir de álgebras Abelianas.
- La *serie derivada* se define inductivamente por
  - $\mathfrak{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$,
  - $\mathfrak{D}^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{D}^n\mathfrak{g}, \mathfrak{D}^n\mathfrak{g}]$.
- Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, tenemos una sucesión decreciente de ideales
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{D}^0\mathfrak{g} \trianglerighteq \mathfrak{D}^1\mathfrak{g} \trianglerighteq \mathfrak{D}^2\mathfrak{g} \trianglerighteq \cdots ,$$
tal que cada cociente sucesivo es Abeliano. Esto define la *serie derivada de* $\mathfrak{g}$.
- Un álgebra de Lie se dice *soluble* si su serie derivada termina en 0. Un grupo de Lie se dice soluble si su álgebra de Lie es soluble.

- El espacio de matrices $n \times n$ triangulares superiores $T(n, \mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es soluble. Sus elementos son de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Las álgebras de Lie solubles permiten resolver el problema de encontrar un eigenvector común.
- (Teorema de Lie) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) soluble y $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces, existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ y $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ lineal tal que $\pi(X)(v) = \lambda(X)v$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.
- Como consecuencia del Teorema de Lie, toda álgebra de Lie soluble es isomorfa a una subálgebra de $T(n, \mathbb{C})$ para algún $n$.
- Cuando $\mathfrak{g}$ es Abeliana y $\varphi$ es la inclusión, el Teorema de Lie se reduce a un resultado bien conocido de álgebra lineal: toda familia de matrices complejas que conmutan posee un eigenvector común.
- La condición óptima para obtener un eigenvector común es que la familia de matrices dada genere un álgebra de Lie soluble.

## (Imposibilidad de) la clasificación de álgebra de Lie solubles

- La clasificación de las álgebras de Lie solubles es, para fines prácticos, imposible.

- Una *representación* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.
- Toda representación $\pi$ nos permite definir una forma bilineal simétrica $B_\pi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ el campo de $\mathfrak{g}$) mediante

$$B_\pi(X, Y) = \mathrm{tr}(\pi(X)\pi(Y)).$$

- Respecto de la forma bilineal $B_\pi$, los operadores $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(X) = [X, \cdot]$ son anti-simétricos

$$B_\pi([X, Y], Z) = -B_\pi(Y, [X, Z]).$$

- La *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$ es la forma bilineal asociada a la representación adjunta $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(X)\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(Y)).$$

- Un álgebra de Lie se dice *semisimple* si su forma de Killing es no-degenerada. Un grupo de Lie se dice semisimple si su álgebra de Lie es semisimple.

- (Teorema de Descomposición de Levi) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existen subálgebras $\mathfrak{s}, \mathfrak{r} \leq \mathfrak{g}$ (posiblemente 0) tales que
  - $\mathfrak{r}$ es ideal soluble,
  - $\mathfrak{s}$ es semisimple (cuando $\mathfrak{s} \neq 0$),
  - $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ (producto semidirecto).
- En este caso, $\mathfrak{r}$ es el ideal soluble más grande en $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{s}$ es el cociente semisimple más grande de $\mathfrak{g}$.

- La clasificación de las álgebras de Lie semisimples fue obtenida por Killing y Cartan.
- Un álgebra de Lie se dice *simple* si no posee ideales no triviales y no es Abeliana (i.e. dim $\neq 1$).
- Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces existe una descomposición (única salvo reordenamiento) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ donde cada $\mathfrak{g}_j$ es un ideal simple.
- Las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$ se pueden enumerar "fácilmente".
- Todas se obtienen de grupos de Lie de simetrías de estructuras lineales sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y álgebras excepcionales.

- Las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ están divididas en dos familias.
- Las álgebras de Lie simples clásicas sobre $\mathbb{C}$ consta de 4 familias infinitas.
- Tipo A: $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
- Tipo B: $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n+1}(\mathbb{C}) : A^\top A = I_{2n+1}\}$, $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n+1}(\mathbb{C}) : A^\top + A = 0\}$.
- Tipo C: $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) : A^\top J_n A = J_n\}$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) : A^\top J_n + J_n A = 0\}$
- Tipo D: $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) : A^\top A = I_{2n}\}$, $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) : A^\top + A = 0\}$.
- Sin embargo, $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \times \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ no es simple.

- Existen 5 álgebras de Lie excepcionales sobre $\mathbb{C}$.
- $\mathfrak{g}_2$ de dimensión 14, el álgebra de Lie del grupo de automorfismos de los octonios.
- $\mathfrak{f}_4$ de dimensión 52, el álgebra de Lie del grupo de automorfismos del álgebra de Albert.
- $\mathfrak{e}_6$ de dimensión 78.
- $\mathfrak{e}_7$ de dimensión 133.
- $\mathfrak{e}_8$ de dimensión 248.
- Las álgebras de Lie de tipo $\mathfrak{e}$ se pueden definir en términos de simetrías de planos proyectivos construidos a partir de los octonios.

- Recordamos la identidad $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.
- Pero existen otras identidades similares

$$\mathbb{C}^{2n} = V \oplus iV, \quad V = \{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}^n\}.$$

- En espacios vectoriales, todas son *linealmente* equivalentes.
- En el caso de álgebras de Lie obtenemos objetos no equivalentes en general.

- Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ es un álgebra de Lie compleja, una forma real de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ es una subálgebra de Lie real $\mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$.
- Formas reales de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$:
  - $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
  - $\mathfrak{su}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^* + A = 0, \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
  - $\mathfrak{su}(p, q) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^* I_{p,q} + I_{p,q} A = 0, \mathrm{tr}(A) = 0\}$ $(n = p + q)$.
  - $\mathfrak{su}^*(2m) = \{A \in M_{2m}(\mathbb{C}) : A$ es $\mathbb{H}$-lineal en $\mathbb{H}^m \simeq \mathbb{C}^{2m}\}$ $(n = 2m)$.
- Formas reales de $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$:
  - $\mathfrak{so}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^\top + A = 0\}$.
  - $\mathfrak{so}(p, q) = \{A \in M_{2n+1}(\mathbb{R}) : A^\top I_{p,q} + I_{p,q} A = 0\}$ $(2n + 1 = p + q)$.

- Formas reales de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$:
  - $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) : A^\top J_n + J_n A = 0\}$.
  - $\mathfrak{sp}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{H}) : A^* + A = 0\}$.
  - $\mathfrak{sp}(p, q) = \{A \in M_n(\mathbb{H}) : A^* I_{p,q} + I_{p,q} A = 0\}$ $(n = p + q)$.
- Formas reales de $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$:
  - $\mathfrak{so}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^\top + A = 0\}$.
  - $\mathfrak{so}(p, q) = \{A \in M_{2n+1}(\mathbb{R}) : A^\top I_{p,q} + I_{p,q} A = 0\}$ $(2n + 1 = p + q)$.
  - $\mathfrak{so}^*(2m) = \{A \in M_{2m}(\mathbb{C}) : A^* J_m + J_m A = 0, A^\top + A = 0\}$ $(n = 2m)$.

- En cuanto a las álgebras de Lie excepcionales:
  - $\mathfrak{g}_2$ tiene 2 formas reales.
  - $\mathfrak{f}_4$ tiene 3 formas reales.
  - $\mathfrak{e}_6$ tiene 5 formas reales.
  - $\mathfrak{e}_7$ tiene 4 formas reales.
  - $\mathfrak{e}_8$ tiene 3 formas reales.

- Los espacios Riemannianos simétricos se pueden describir en términos de grupos y álgebras de Lie semisimples.
- Para $M$ un espacio Riemanniano simétrico simplemente conexo tenemos:
  - $M \simeq \mathbb{R}^n \times M_1$, donde $n \geq 0$ y el grupo de isometrías de $M_1$ es semisimple. Si $n = 0$, decimos que $M$ es semisimple.
  - Si $M$ es semisimple, entonces $M \simeq M_1 \times \cdots \times M_k$ producto de factores *irreducibles*, cada factor de uno de los siguientes tipos.
    - Tipo I: $G/U$, $G$ complejo simple, $U$ compacto y $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$.
    - Tipo II: $U \simeq (U \times U)/\Delta_U$, $U$ compacto simple.
    - Tipo III: $G/K$, $G$ simple, $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ simple y $K$ maximal compacto en $G$.
    - Tipo IV: $U/K$, $U$ compacto simple, $K$ subgrupo maximal.
  - II y IV definen los espacios irreducibles de tipo compacto.
    I y III definen los espacios irreducibles de tipo nocompacto.