Escuela de Geometría y Topología
Grupos de Lie y Geometría Diferencial
Tarea 1

8–11 de abril de 2025

1. Sea $\gamma : I \to S^n$ una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = p_0$. Probar que el espacio tangente a S^n es el complemento ortogonal $(\mathbb{R}p_0)^\perp$ estableciendo que $\gamma'(t) \perp \gamma(t)$ para cada $t \in I$. Probar un resultado correspondiente para H^n.

2. En H^2 considere el punto $p_0 = (0, a, b) \in H^2$ y la geodésica

$$\gamma(t) = (\sinh(t), 0, \cosh(t)),$$

contenida en el plano xz.

   a) Escriba las ecuaciones de las geodésicas que pasan por p_0.

   b) Pruebe que existe una infinidad de geodésicas que pasan por p_0 que no intersectan a γ.

3. Escriba el producto en $\mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Recuerde que este grupo tiene la estructura que lo hace corresponder con las isometrías de $\mathbb{R}^n$. Probar que el producto se puede obtener como heredado del producto matricial a partir de la inclusión

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n &\to M_{n+1}(\mathbb{R}) \\ (A, v) &\mapsto \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (*) Utilizando los cálculos con campos de Jacobi, pruebe que para la esfera S^n se cumple

$$R(u, v)w = \langle w, v\rangle u - \langle w, u\rangle v.$$