

Escuela de Geometría y Topología

Grupos de Lie y Geometría Diferencial

Tarea 2

8–11 de abril de 2025

1. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ defina el mapeo

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ \varphi(t) &= (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}).\end{aligned}$$

- a) Probar que φ es un homomorfismo de grupos de Lie, i.e. diferenciable.
 - b) Probar que existe $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(t_0) = \varphi(0)$ si y sólo si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Probar que los grupos $O(n)$, $U(n)$ y $Sp(n)$ son compactos.
 3. Dibujar las órbitas de $e_1 = (1, 0)$ respecto de la representación del grupo $(1, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Utilizar el dibujo para probar que el grupo $O(1, 1)$ no es compacto.
 4. Denotamos $P(n) = \{P \in SL(n, \mathbb{R}) : P \text{ es simétrica positiva definida}\}$.
 - a) Probar que el mapeo

$$\begin{aligned}P(n) \times SO(n) &\rightarrow SL(n, \mathbb{R}) \\ (P, A) &\mapsto PA,\end{aligned}$$

es biyectivo y diferenciable.

- b) Concluir del inciso anterior que se tiene un difeomorfismo natural

$$P(n) \simeq SL(n, \mathbb{R})/SO(n).$$

(Se puede ver que este cociente define un espacio Riemanniano simétrico)